

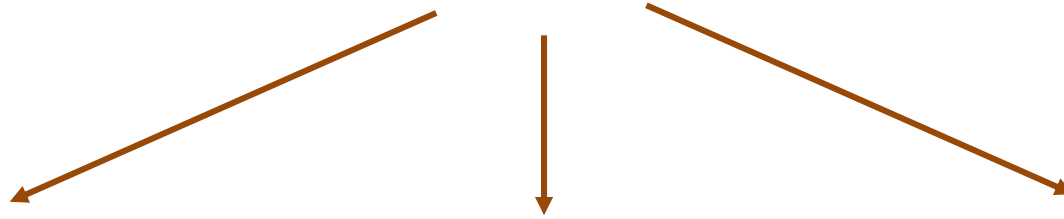
# PODSTAWY ELEKTROTECHNIKI

# PRĄD STAŁY

# PRĄD ELEKTRYCZNY

# PRĄD ELEKTRYCZNY

Z **prądem elektrycznym** mamy do czynienia gdy ładunki elektryczne poruszają się lub zmieniają w czasie. Za dodatni kierunek przyjęto przeciwny do kierunku ruchu elektronów.



## PRĄD UNOSZENIA (KONWEKCJI)

- przestrzeń z ładunkami swobodnymi; działające na ładunki o gęstości objętościowej, pole elektryczne  $E$  powoduje ich ruch z prędkością  $v$ ;  
(**lampy elektronowe**)

## PRĄD PRZEWODZENIA

- ruch ładunków, elektronów lub jonów  
(**przewodniki**)

## PRĄD PRZESUNIĘCIA

- przemieszczanie ładunków wewnątrz atomu bez naruszania jego struktury pod wpływem zmiennego w czasie pola elektrycznego; zmiana polaryzacji próżni, zmiana polaryzacji cząstek  
(**kondensatory**)

## PODZIAŁ CIAŁ POD WZGLĘDEM ELEKTRYCZNYM

(ze względu na przeważający rodzaj prądu)

- przewodniki: tylko prąd przewodzenia;
- dielektryki: tylko prąd przesunięcia;
- półprzewodniki: prąd przewodzenia i przesunięcia, możliwość sterowania poprzez odpowiednią polaryzację złącza.

# PRZEWODNIKI PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

## PODZIAŁ CIAŁ POD WZGLĘDEM ELEKTRYCZNYM

(ze względu na przeważający rodzaj prądu)

Cząstki obdarzone ładunkiem mogą występować w pustej przestrzeni, ale mogą też znajdować się w materiale. W zależności od tego czy materiał „pozwała” na ruch ładunków dzielimy materiały na:

- **izolatory**: ładunki nie mają możliwości ruchu (szkło, papier, ebonit, polietylen) → **prąd przesunięcia**
- **przewodniki**: ładunki swobodnie mogą się poruszać (metale, polimery przewodzące) → **prąd przewodzenia**
  - **I klasy** – metale → podczas przepływu prądu nie podlegają zmianom chemicznym
  - **II klasy** – roztwory (elektrolity) → podczas przepływu prądu podlegają zmianom chemicznym)
- **półprzewodniki**: ładunki się poruszają, ale ich ruch nie jest w pełni swobodny, a ich ilość zależy od temperatury materiału (krzem, german) → **prąd przewodzenia i przesunięcia, możliwość sterowania poprzez odpowiednią polaryzację złącza p-n.**

# PRĄD ELEKTRYCZNY

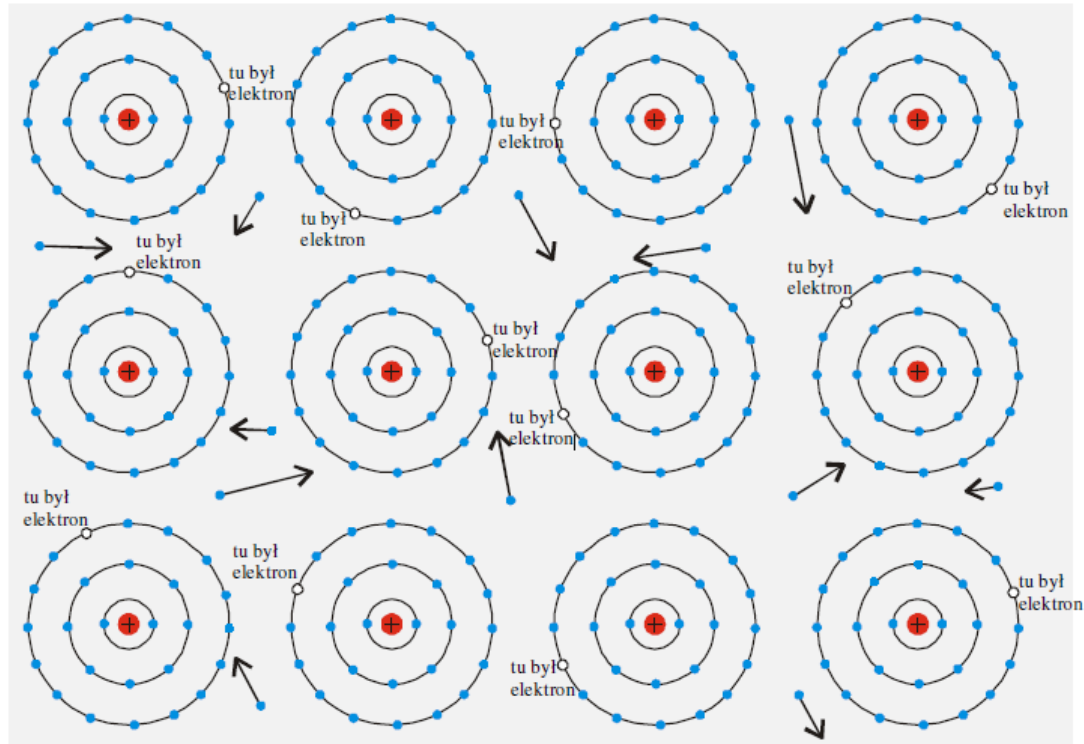
Jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych wywołany różnicą potencjałów. Warunki powstania prądu elektrycznego:

- nośniki ładunku muszą mieć możliwość poruszania się w przestrzeni (tzn. nie mogą być np. unieruchomione w sieci krystalicznej)
- musi istnieć przyczyna ruchu (np. siła elektryczna  $F_E=qE$ , dyfuzja, unoszenie)

substancja przewodząca	nośnik
przewodnik	elektrony walencyjne
elektrolit	jony
gaz	jony i elektrony
półprzewodnik	elektrony i dziury
próżnia	dowolny rodzaj ładunków

Nośniki prądu elektrycznego

# PRZEWODNIKI PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

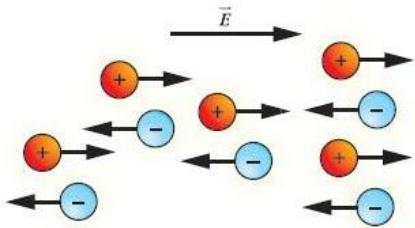


Jeśli na swobodne elektrony nie działa zewnętrzna siła, ich ruch jest bezładny, chaotyczny.

Jeżeli jednak jakiś czynnik zewnętrzny uporządkuje ruch ładunków, mamy do czynienia z prądem elektrycznym.

# RUCH ŁADUNKÓW POD WPŁYWEM POLA ELEKTRYCZNEGO

Jeśli zewnętrzne źródło pola elektrycznego wymusza uporządkowany ruch (przepływ) ładunków w ciele przewodzącym, czyli odpływ z niego jednych ładunków jest równoważony dopływem do niego innych ładunków, to mamy do czynienia z polem elektrycznym przepływowym → przepływ prądu elektrycznego → przepływ nośników ładunku trwa on tak długo, aż wewnątrz przewodnika zaniknie pole elektryczne



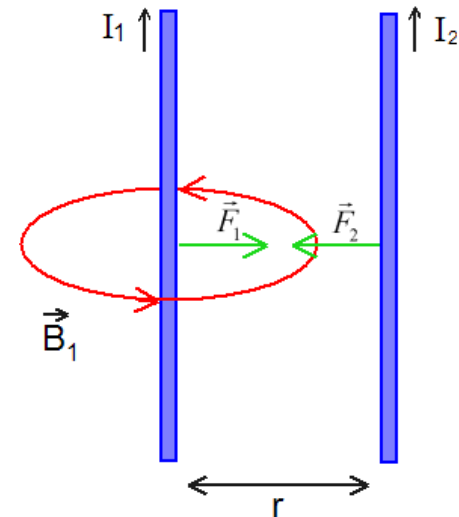
Wielkością skalarną charakteryzującą zjawisko prądu elektrycznego jest natężenie prądu elektrycznego.

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Prąd elektryczny  $I$  – graniczna wartość stosunku hipotetycznego (umownego) dodatniego ładunku elektrycznego  $dQ$ , przepływającego przez przekrój przewodnika  $S$  w czasie  $dt$ , do tego czasu.

$$I = \frac{Q}{t} \left[ \frac{C}{s} = A \right]$$

Prąd niezmienny w czasie  $i(t) = I = \text{const.}$  nazywa się prądem stałym.



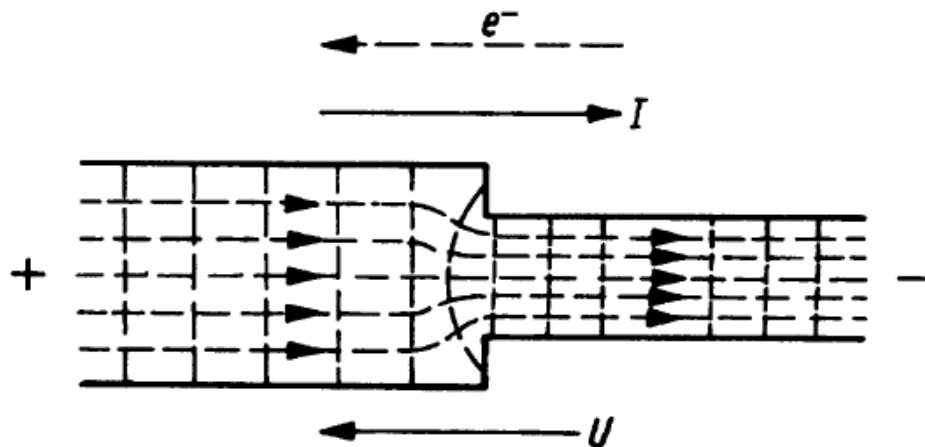
Stąły prąd elektryczny o natężeniu 1 A jest prądem, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju kołowym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m od siebie, spowodowałby wzajemne oddziaływanie przewodów na siebie z siłą równą  $2 \cdot 10^{-7}$  N na każdy metr długości przewodu.

## POLE ELEKTRYCZNE PRZEPEŁYWOWE

Jeśli zewnętrzne źródło pola elektrycznego wymusza uporządkowany ruch (przepływ) ładunków w ciele przewodzącym, czyli odpływ z niego jednych ładunków jest równoważony dopływem do niego innych ładunków, to mamy do czynienia z POLEM ELEKTRYCZNYM PRZEPEŁYWOWYM !!!.

Jeśli przy tego rodzaju przemieszczaniu się i wymianie nośników prądu, przestrzenny rozkład ładunków w ciele przewodzącym nie zmienia się z upływem czasu, to wówczas nie indukuje się w nim pole wewnętrzne.

W takiej sytuacji mówi się, że źródło wytwarza, a w ciele przewodzącym występuje, pole elektryczne przepływowe stacjonarne (statyczne). Z przepływowym stacjonarnym polem elektrycznym związany jest przepływ prądu stałego.



Przeplawowe pole elektryczne w przewodniku

Rozkład linii sił i linii ekwipotencjalnych w przewodzie o zmiennym przekroju. W obu odcinkach przewodu występuje jednorodne pole elektryczne, którego natężenie we wszystkich punktach jest takie samo, równe napięciu pomiędzy liniami ekwipotencjalnymi, podzielonemu przez odległość pomiędzy nimi.

$$U = \frac{E}{d}$$

# POLE ELEKTRYCZNE PRZEPIŁYWOWE

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$



Zapis skalarny

$$F = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$

$$V = \frac{E_p}{q_0} = \frac{\frac{Q \cdot q_0}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r}$$



$$U = (V_1 - V_2) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$E_p = W_{\infty \rightarrow r_1} = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right)$$

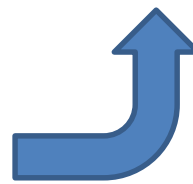


$$W_{AB} = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = E_{pA} - E_{pB}$$



$$dW_{AB} = F dr = E \cdot q_0 \cdot dr$$

$$W_{AB} = q_0 (V_A - V_B) = q_0 \cdot U$$



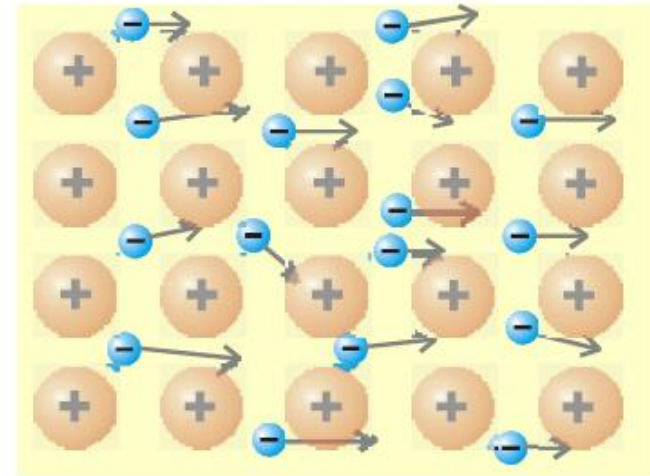
$$d = r_1 - r_2$$

$$U = \frac{E}{d}$$

odległość pomiędzy liniami ekwipotencjalnymi

# POLE ELEKTRYCZNE PRZEPŁYWOWE

Każdego roku, od 6 do 14 lipca w Pampelunie w Hiszpanii, obchodzone jest święto Sanfermines, ku czci św. Fermina. Główną atrakcją święta jest encierro (dosł. zamknięcie), czyli przepędzanie ulicami miasta stada byków.

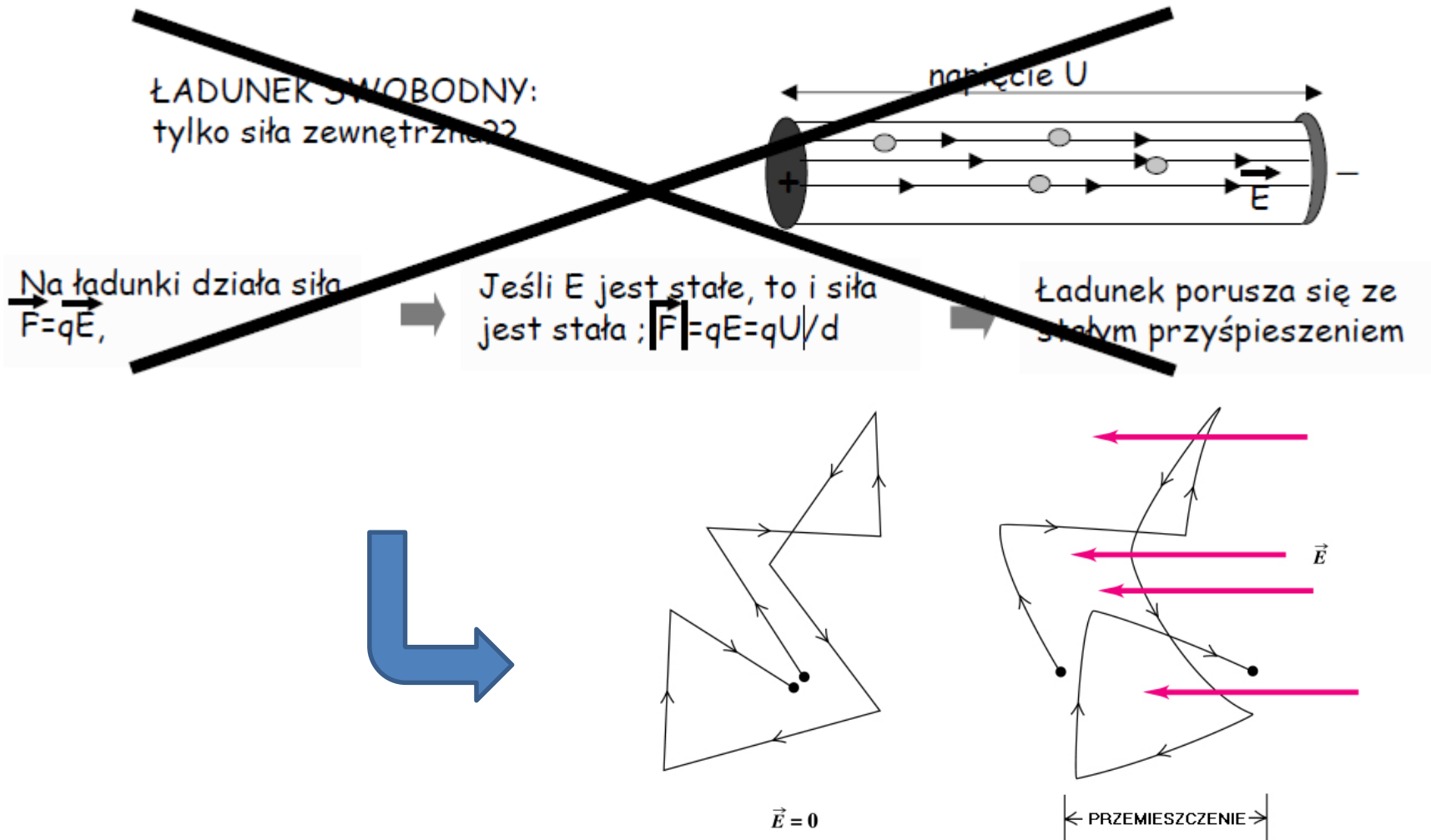


Wyobraź sobie, że jesteś w hiszpańskim mieście Pampeluna na ulicy. Trwa festyn. Ludzie chodzą chaotycznie z miejsca na miejsce potracając się wzajemnie. Wreszcie następuje główna atrakcja dnia: wypuszczono byki. Tłum zaczyna się poruszać w jedną stronę, byle dalej od byków biegnących ulicą. Zanim puszczono byki ulica przypomina przewodnik, w którym nie płynie prąd.

Ludzie to swobodne nośniki ładunku. Byki wymuszają uporządkowany ruch tłumu. Z takim uporządkowanym ruchem ładunków mamy do czynienia w czasie przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik.

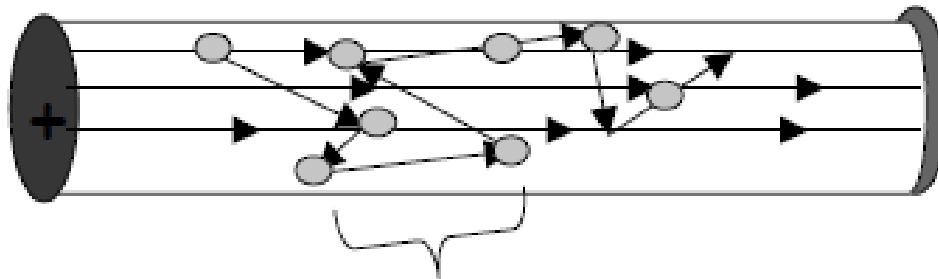
# POLE ELEKTRYCZNE PRZEPLYWOWE

Prąd elektryczny to ruch ładunków pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego.



## POLE ELEKTRYCZNE PRZEPŁYWOWE

Zjawisko prądu elektrycznego ma dynamiczny charakter. Nośniki prądu zderzają się ze sobą i z innymi cząstkami, przy czym wytracają prędkość, następnie oddalają się od siebie nabierając prędkości, znowu się zderzają itd. Średnia prędkość przemieszczania się nośników prądu  $v$ , tj. średnia prędkość ich uporządkowanego ruchu, równa wektorowi średniej prędkości między ich zderzeniami, zależy wprost proporcjonalnie od wartości ładunku nośnika prądu i natężenia zewnętrznego pola elektrycznego  $E$ , oraz w pewnym stopniu – od pobudzenia termicznego atomów (czyli od temperatury ciała).



średnia droga swobodna

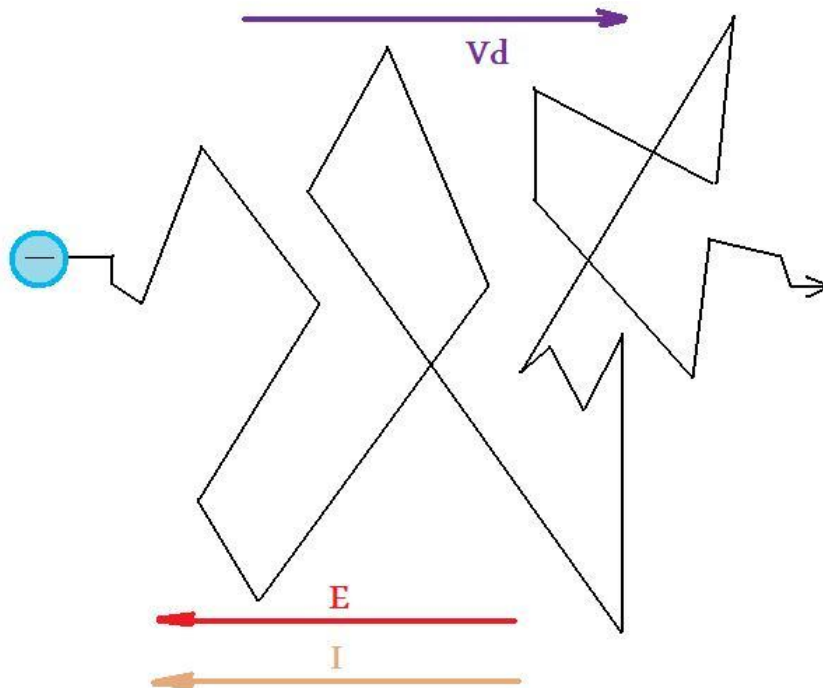
Elektrony poruszają się swobodnie (pod działaniem pola) tak długo aż nie zostaną rozproszone na niedoskonałościach struktury. Między zderzeniami elektron jest rzeczywiście przyspieszany i przebywa odległość  $l$  (średnia droga swobodna) w czasie  $t$  (czas relaksacji). Po zderzeniu traci pamięć kierunku ruchu i przyspieszanie rozpoczyna się na nowo. Średnia prędkość ładunków (prędkość unoszenia) jest stała

# PRĄD ELEKTRYCZNY

W metalach (które są dobrymi bezwładnikami elektrycznymi) nośnikami ładunków są elektrony.

Elektrony przewodnictwa są w nieustannym ruchu (model „gazu elektronowego”) i zderzają się z atomami.

Kiedy przyłożone zostanie pole elektryczne wówczas ruch elektronów stanie się „bardziej uporządkowany”.



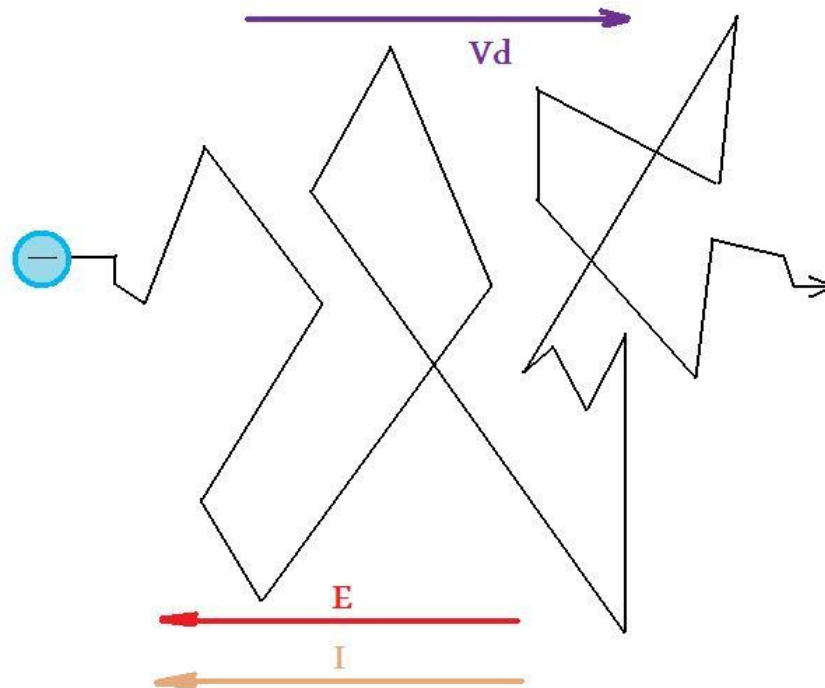
Efektywnie elektrony przemieszczają się z prędkością ‘dryfowania’  $v_d$ .

Elektrony (mają ładunek ujemny) więc poruszają się przeciwnie do ustalonego kierunku prądu.

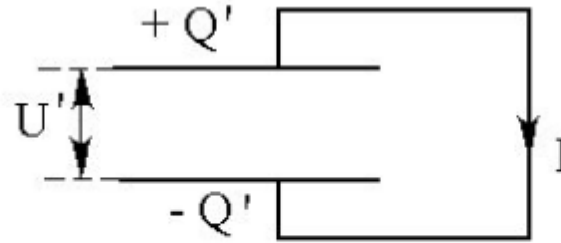
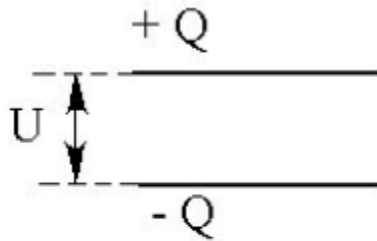
# PRĄD ELEKTRYCZNY

Prędkość dryfu elektronów jest stosunkowo niewielka rzędu  $10^{-1} - 10^{-4}$  m/s  
W przewodniku natomiast pole elektryczne działa na wszystkie elektrony – rozprzestrzenia się w przewodniku z prędkością światła. (to pole elektryczne rozchodzi się z prędkością światła – nie elektrony)

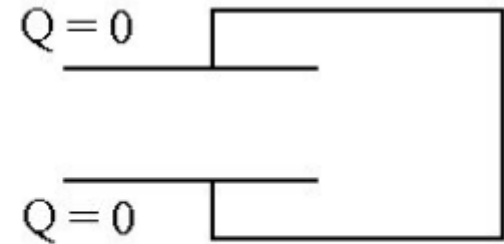
Przykład: jeśli bateria zostaje podpięta do przewodnika to nie dostarcza ładunków tylko dostarcza „siły” aby ładunki elektryczne poruszyć.



## PRĄD ELEKTRYCZNY



$$U' < U, Q' < Q$$



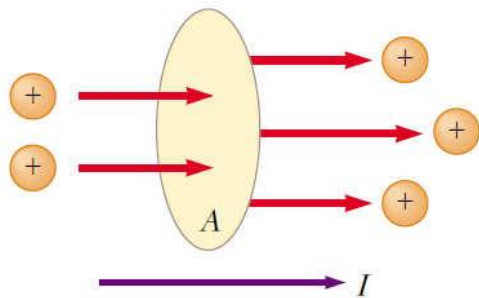
Jak wiadomo, w stanie ustalonym wszystkie punkty przewodnika mają ten sam potencjał a natężenie pola elektrycznego wewnątrz niego jest równe zero. Jeżeli na przewodnik wprowadzimy ładunek, w przewodniku wytworzy się pole elektryczne. Ładunki elektryczne będą się wówczas przemieszczać aż do wyrównania się potencjałów wszystkich punktów przewodnika. Ogólnie prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przestrzeni. W rozpatrywanym przykładzie występuje więc przepływ prądu wewnątrz przewodnika aż do momentu ustalenia się określonego rozkładu ładunku. Ma to np. miejsce w przypadku rozładowania kondensatora

# PRĄD ELEKTRYCZNY

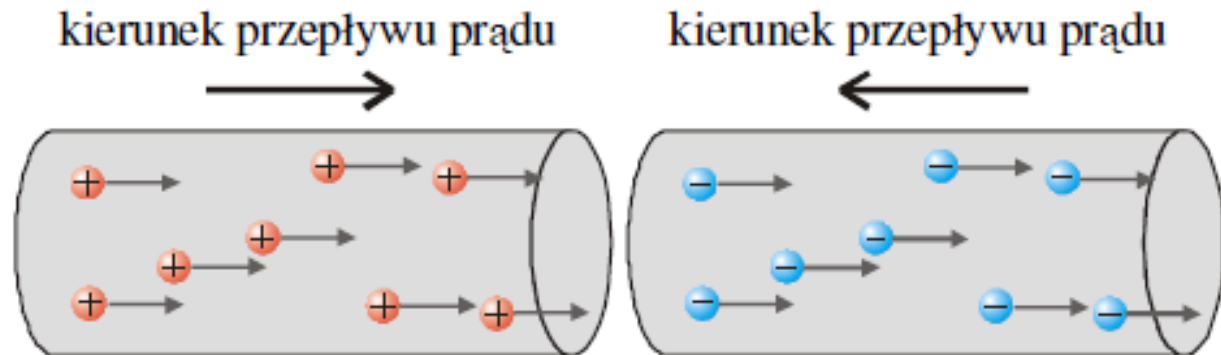
Prąd związany z przepływem ładunków w przewodniku nosi nazwę **prądu przewodzenia**. Kierunek przepływu prądu zależy od kierunku ruchu oraz od znaku przemieszczających się ładunków.

Przyjmuje się, że prąd płynie od punktu (punktów) o wyższym potencjale do punktu (punktów) o niższym potencjale, a więc kierunek przepływu prądu jest zgodny z kierunkiem ruchu ładunków dodatnich.

Jeśli nośnikami prądu są ładunki ujemne, to kierunek prądu jest przeciwny do kierunku ruchu ładunków.



Za kierunek przepływu prądu uważamy kierunek przepływu ładunku dodatniego (kierunek odwrotny do przepływu elektronów)

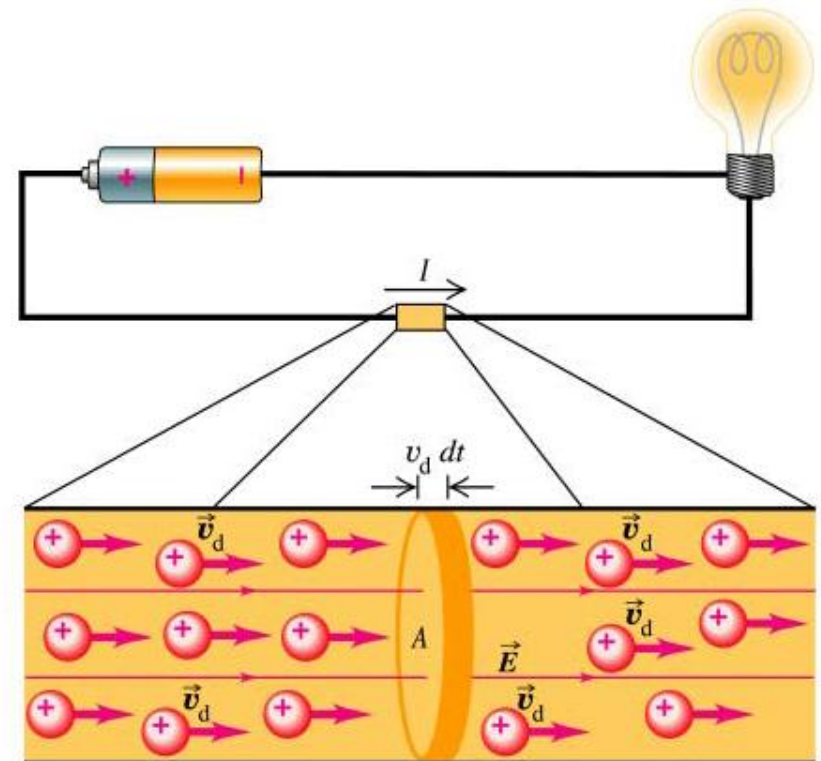
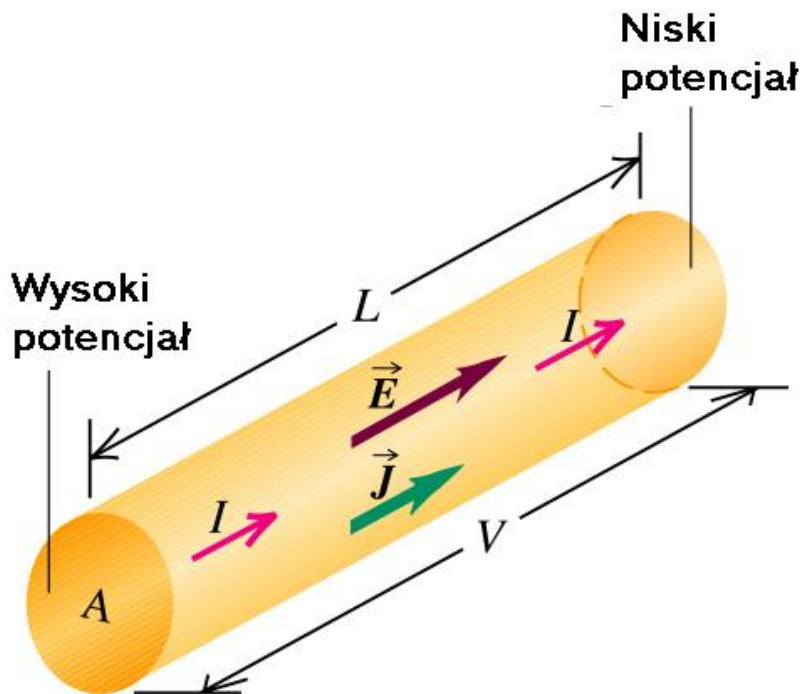


# PRĄD ELEKTRYCZNY

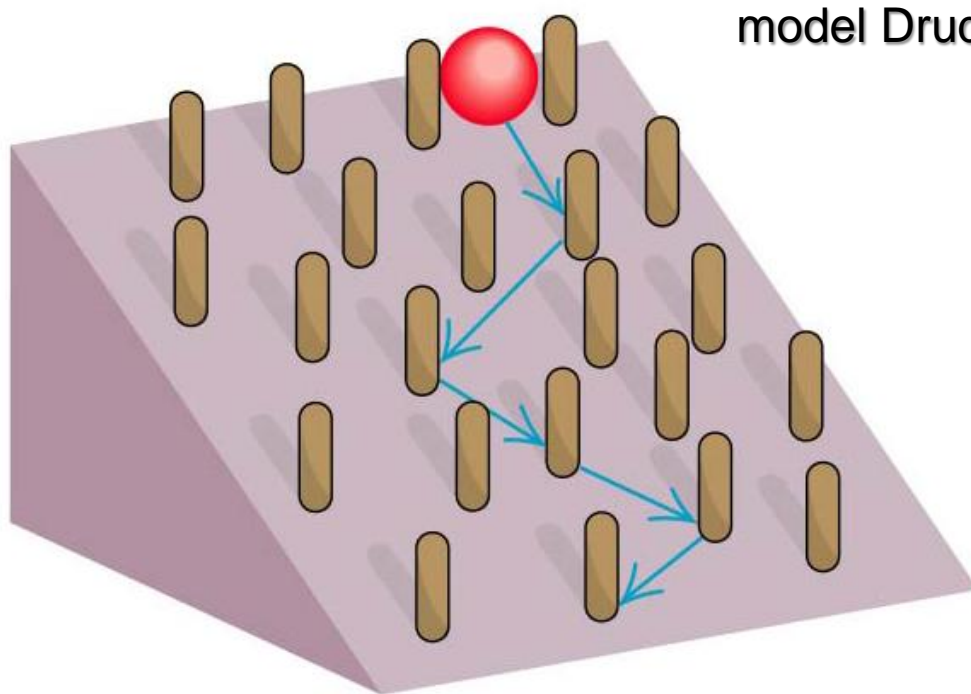
Zgodnie z tradycją, za kierunki prądu w obwodzie zewnętrznym przyjmuje się kierunek od potencjału wyższego – dodatniego, do niższego – ujemnego, czyli za umowny kierunek prądu przyjmuje się kierunek ruchu ładunków dodatnich.

W czasie przepływu prądu przez przewodniki metalowe mamy do czynienia z ruchem swobodnych elektronów, a więc nośników prądu poruszających się od potencjału niższego do wyższego, czyli w kierunku przeciwnym do umownie przyjętego.

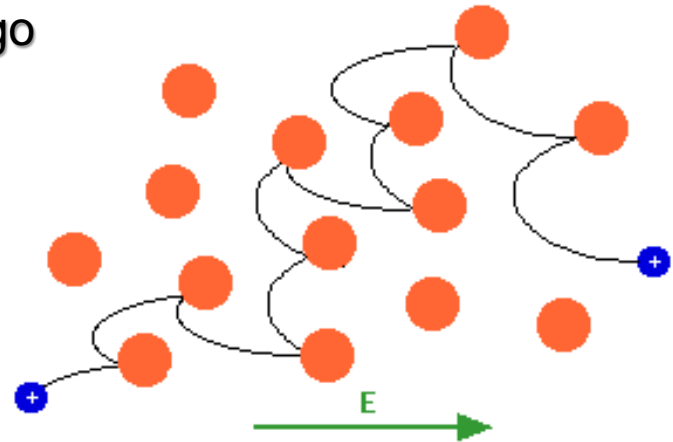
Przyjęto uważać za dodatni kierunek prądu ten, który jest przeciwny do kierunku przepływu elektronów, ponieważ mają one ładunek elektryczny ujemny.



# MODEL PRZEPŁYWU PRĄDU ELEKTRYCZNEGO



model Drudego



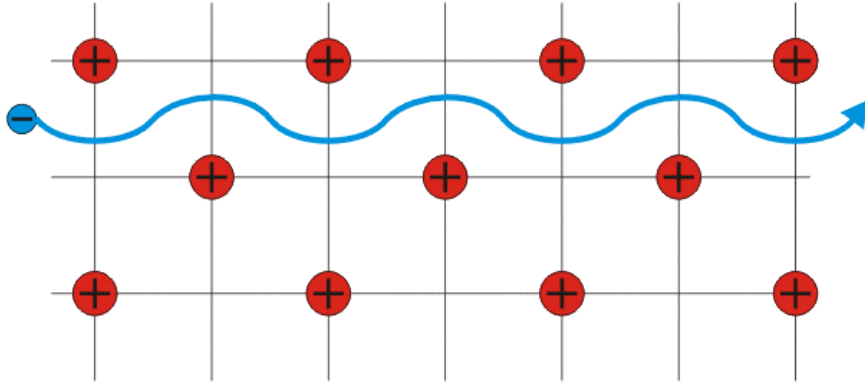
Poruszające się elektrony (niebieskie) zderzają się z jonami sieci krystalicznej (czerwone).

Model Drudego (również model elektronów swobodnych, model gazu elektronów swobodnych) – model przewodnictwa elektrycznego ciał stałych (głównie metali) zaproponowany przez Paula Drudego w 1900 r.

Model stosuje do elektronów klasyczną kinetyczną teorię gazów zakładając, że bezładny ruch elektronów swobodnych w metalu odbywa się podobnie jak ruch cząsteczek w gazie, i że są one rozpraszane (tzw. czas relaksacji) na skutek zderzeń z nieruchomymi jonami sieci krystalicznej. Teoria Drudego dobrze opisuje zjawisko oporu elektrycznego. Nie wyjaśnia wartości przewodności uzyskanych dla poszczególnych metali.

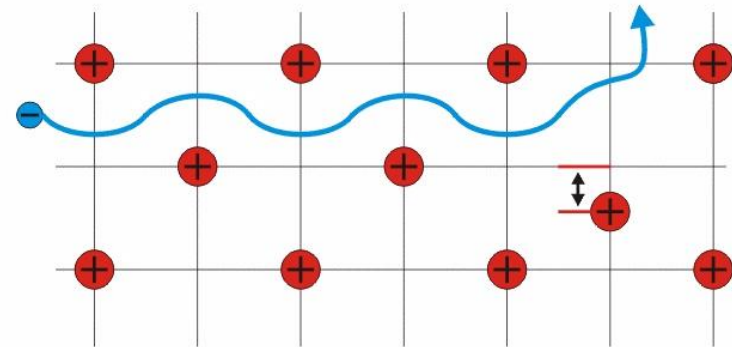
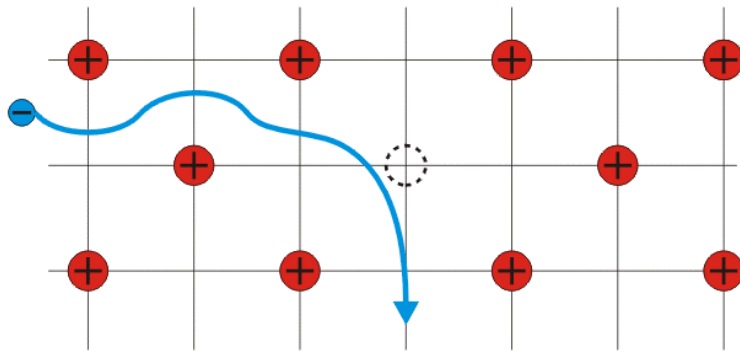
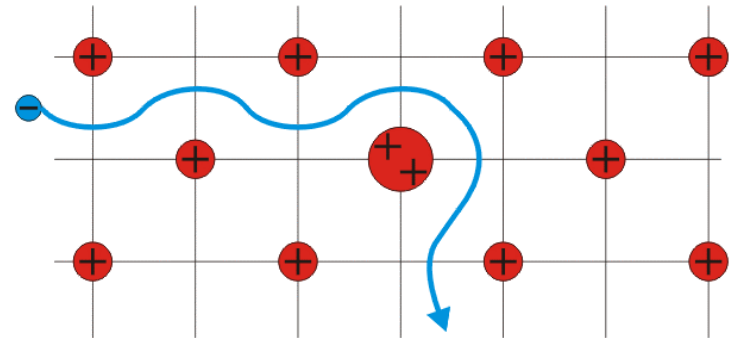
# MODEL PRZEPŁYWU PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

model Blocha

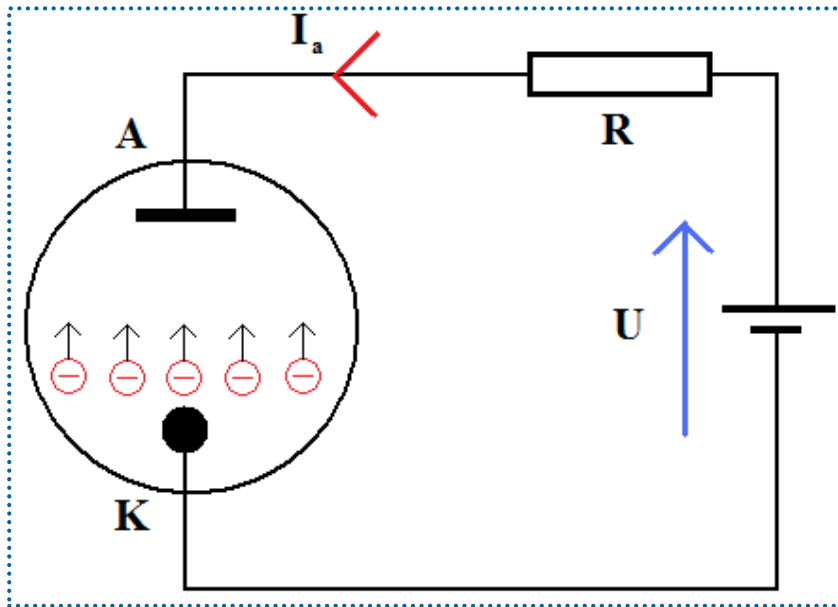


Model poprawnie opisuje przewodność różnych metali i jej zależność temperaturową.

Elektrony są rozpraszane jedynie na niedoskonałościach sieci krystalicznej.



# PRĄD ELEKTRYCZNY W PRÓŻNI



Obwód składający się z diody, ogniwa i rezystora

$$W_0 = eU_0$$

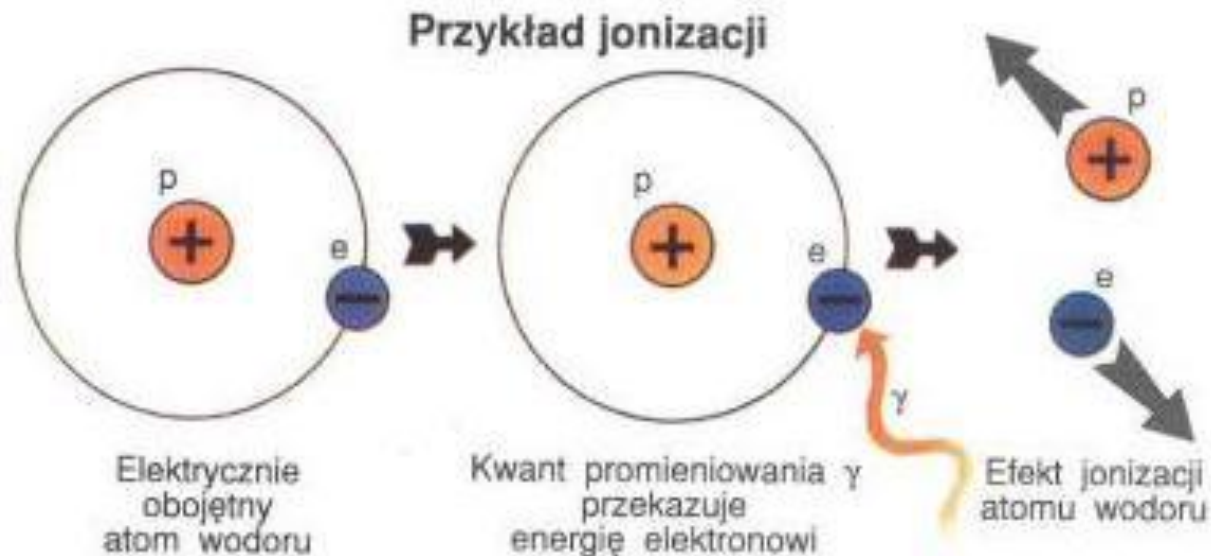
$e$  – ładunek elektronu

$U_0$  – bariera potencjału

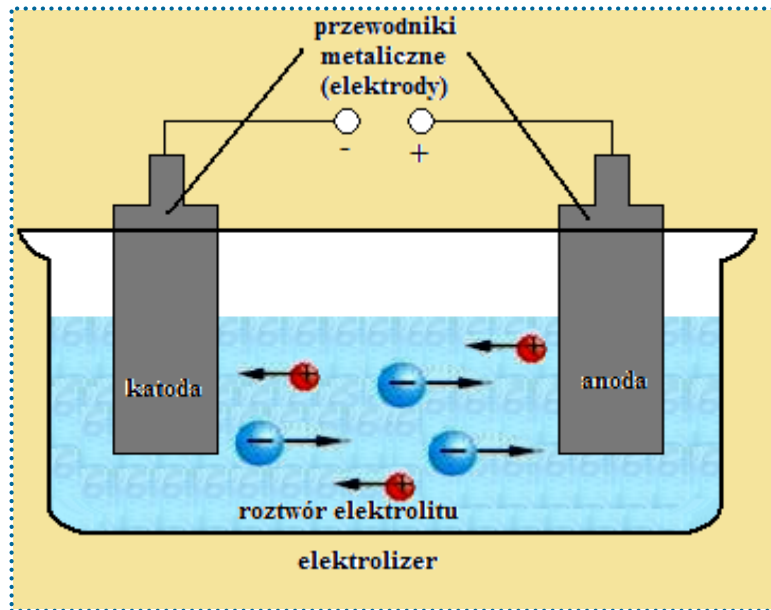
- Różnica potencjałów występująca między elektrodami wywołuje w próżni pole elektryczne (konieczne do powstania prądu)
- Prąd elektryczny nie może powstać, dopóki nie zostaną wprowadzone cząstki obdarzone ładunkiem (gdyż w próżni nie występują elektrony swobodne)
- Osiąga się to dzięki wykorzystaniu zjawiska emisji elektronów, które umożliwia otrzymanie elektronów swobodnych z powierzchni ciał stałych
- Oddalenie się od katody wymaga wykonania pracy wyjściowej  $W_0$

# PRĄD ELEKTRYCZNY W GAZACH

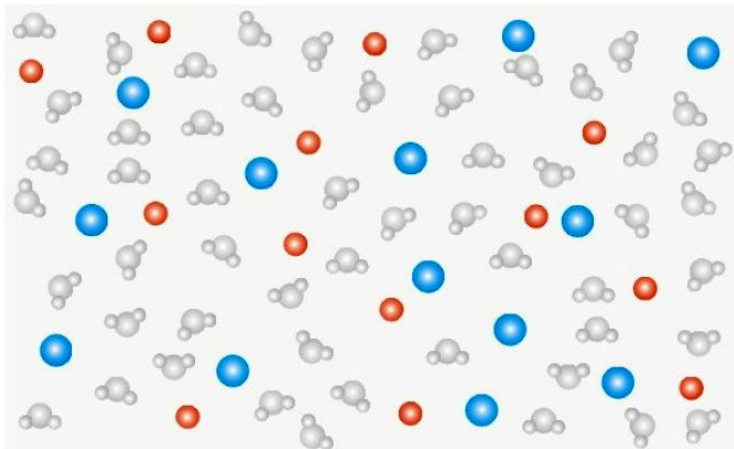
- Prąd elektryczny w środowisku gazowym pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego przepływa tylko wówczas, gdy w środowisku tym znajdują się nośniki ładunku elektrycznego (elektrony lub jony dodatnie)
- **Jonizacja** to proces podziału elektrycznie obojętnego atomu lub cząsteczki, polegający na oderwaniu jednego lub więcej liczby elektronów od atomu
- Fotojonizacja polega na wytrąceniu elektronów z atomów naświetlanych promieniowaniem elektromagnetycznym o dużej energii, przewyższającej energię jonizacji
- W stanie jonizowanym gaz staje się gazem przewodzącym



# PRĄD ELEKTRYCZNY W ELEKTROLITACH



- Pod wpływem pola elektrycznego w elektrolicie następuje przepływ prądu elektrycznego (polegające na ruchu jonów dodatnich i jonów ujemnych)
- Podczas elektrolizy na katodzie wydziela się wodór lub metal, na anodzie przebiega proces utleniania
- Wraz z ruchem jonów przenoszona jest pewna masa (odpowiadająca masie cząsteczkowej jonu), którą określa prawo Faradaya



● cząsteczka wody  
● jon ujemny  
● jon dodatni

Wszystko jest w ciągłym, chaotycznym ruchu

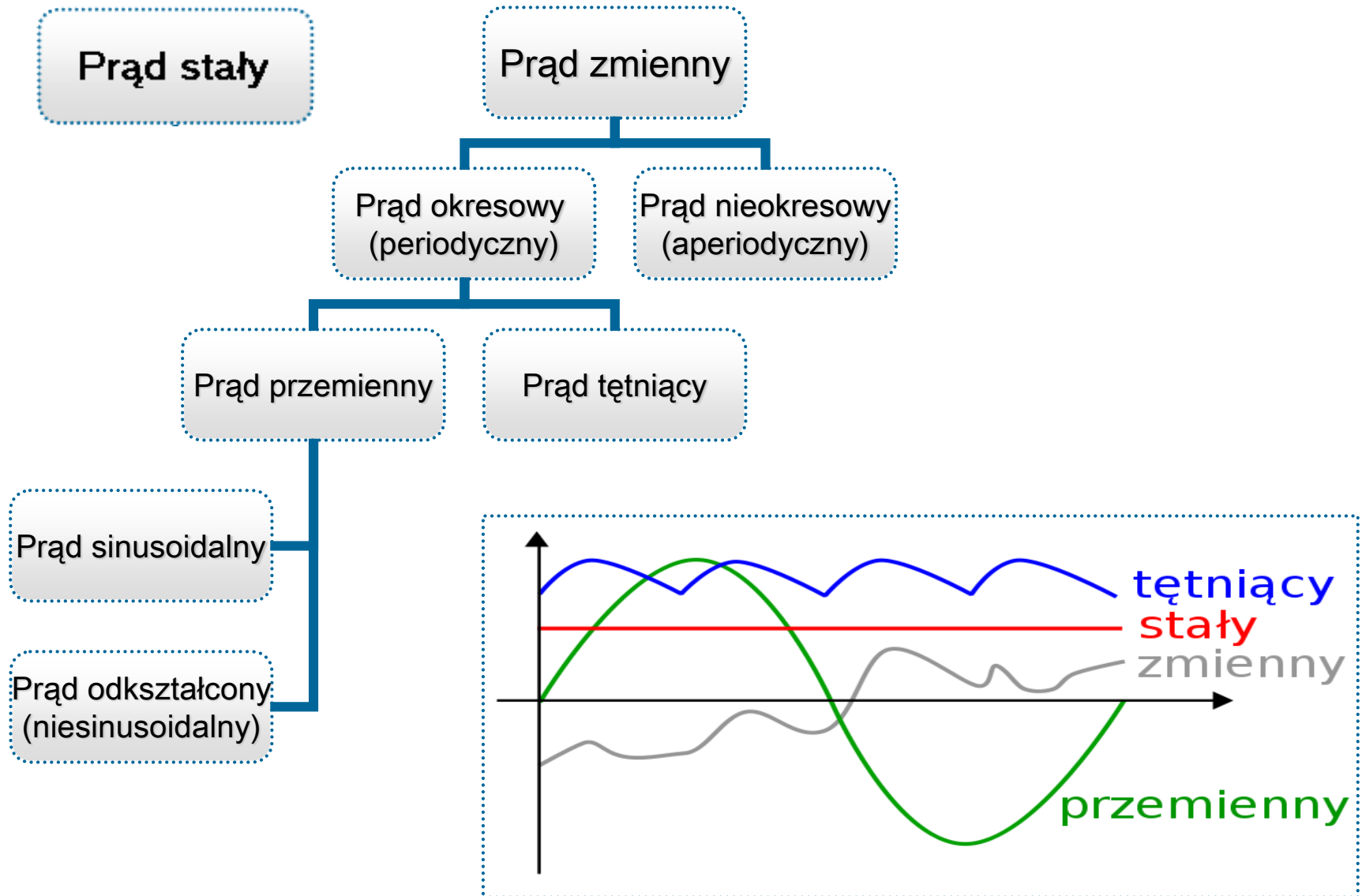
$Q$  – ładunek elektryczny przenoszony przez elektrolit

$k$  – równoważnik elektrochemiczny (kg/C)

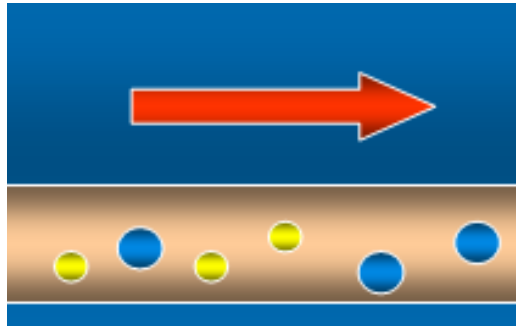
$$m = k \cdot Q$$

# **PRĄD ELEKTRYCZNY - RODZAJE**

# RODZAJE PRĄDU ELEKTRYCZNEGO



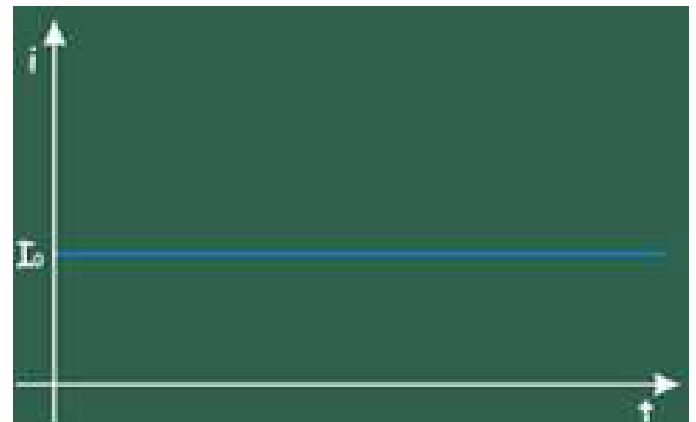
# PRĄD STAŁY



● - Jon dodatni

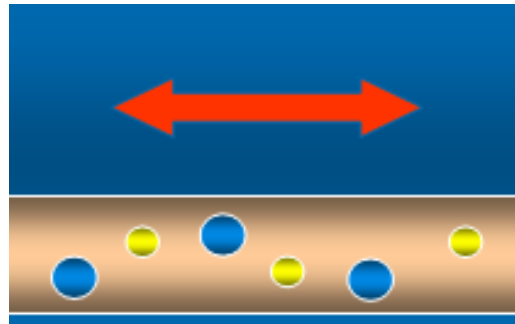
● - Elektrony swobodne

Elektrony poruszają się w sposób ciągły w jednym kierunku. Charakteryzuje się stałą wartością natężenia w funkcji czasu. Elektrony płyną zawsze od ujemnego bieguna baterii do dodatniego.



# PRĄD ZMIENNY

Elektrony poruszają się na przemian w jednym i drugim kierunku w przewodzie i we wszystkich elementach składowych obwodu. Wartość natężenia prądu zmiennego zmienia się w czasie w dowolny sposób.



-  - Jon dodatni
-  - Elektrony swobodne

W zależności od charakteru tych zmian można wyróżnić następujące rodzaje prądu:

- prąd okresowo zmienny
  - tętniący
  - przemienny
- prąd nieokresowy

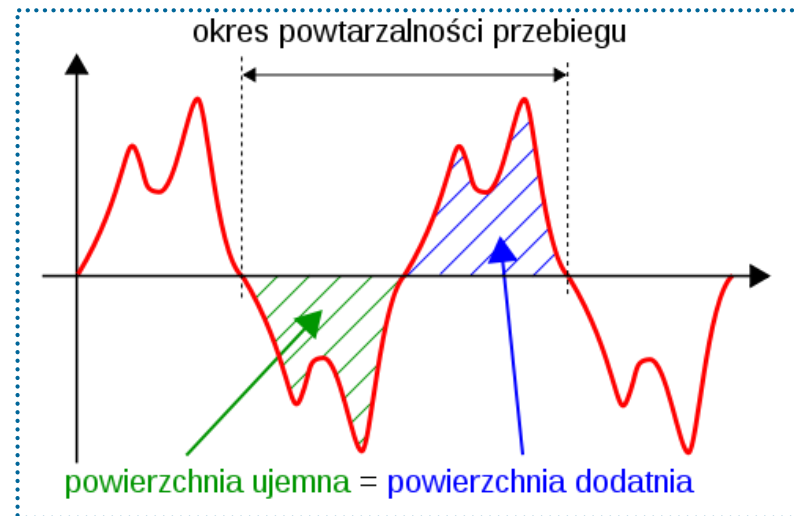


# PRĄD ZMIENNY

## Prąd okresowo zmienny

Zmienia się w sposób okresowy tak, że jego wartości chwilowe powtarzają się w równych odstępach czasu (okresach), w tej samej kolejności i w tym samym kierunku.

- **Prąd przemienny** - wartości chwilowe podlegają zmianom w powtarzalny, okresowy sposób, z określoną częstotliwością.



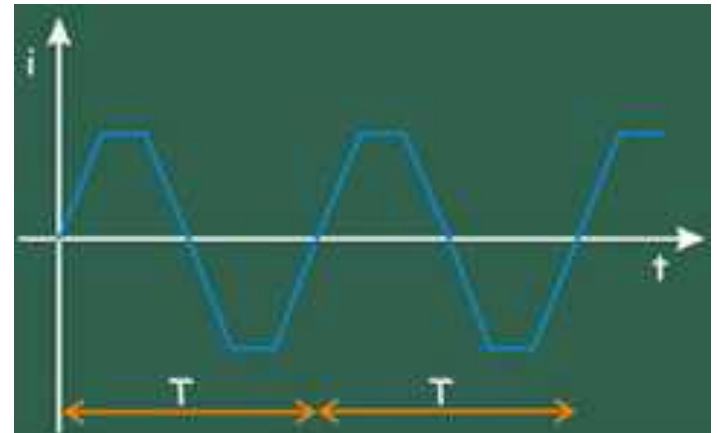
- **Prąd tętniący** - wartość średnia całookresowa w ciągu jednego okresu jest różna od zera. Oznacza to, że taki prąd posiada składową stałą.

## PRĄD ZMIENNY

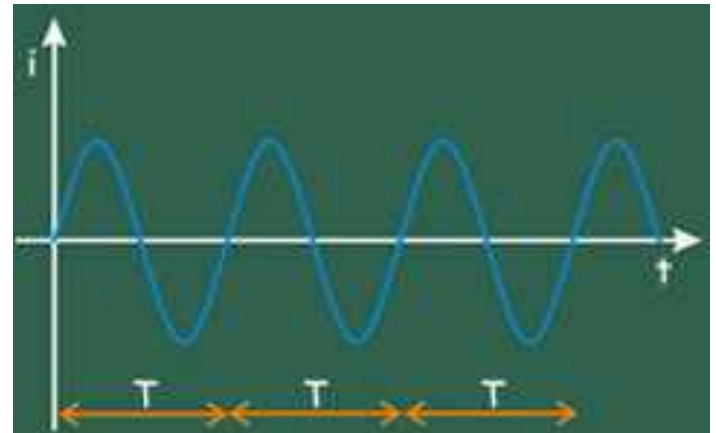
**Prąd okresowo zmienny** jest to prąd zmienny, którego zmiany powtarzają się w czasie.



**Prąd okresowo przemienny** jest to prąd przemienny, którego zmiany powtarzają się w czasie.



**Prąd sinusoidalny** jest to prąd przemienny, którego wartość i kierunek natężenia, zmieniają się jak funkcja sinus (cosinus)



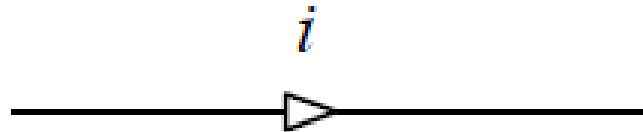
# STRZAŁKOWANIE PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

**Prąd elektryczny** to – podobnie jak napięcie elektryczne i potencjał elektryczny – wielkość skalarna i trudno mówić, o jego zwrocie lub kierunku.

Używa się jednak tych terminów (wymiennie) w celu graficznego zaznaczenia, poprzez **strzałkowanie**, zwrotu prędkości uporządkowanego ruchu ładunków dodatnich (rzeczywistych bądź hipotetycznych), przy znanym torze i kierunku tego ruchu w ciele.

Przyjęcie ruchu ładunku dodatniego za podstawę określenia zwrotu (kierunku) założonej dodatniej wartości prądu ma charakter umowy porządkującej, o znaczeniu historycznym.

Przyjęty sposób strzałkowania prądu elektrycznego → symbolem graficznym jest strzałka o grocie zamkniętym, niezaczernionym. Przy tej strzałce umieszcza się znak literowy prądu.



# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

W wielu przypadkach skomplikowane procesy można wytłumaczyć na podstawie prostych, znanych nam już zjawisk występujących np. w instalacji wodociągowej.

W instalacji wodociągowej występują cztery ważne wielkości fizyczne, które mają swoje odpowiedniki w przewodzie elektrycznym.

1. **Średnica lub przekrój poprzeczny rurociągu.** Z własnego doświadczenia wiemy, że przez rurę o dużym przekroju poprzecznym może przepływać duża ilość wody. Jeśli otwór będzie mały, to w tym samym czasie przez rurę przepłynie mniejsza ilość wody. W układach elektrycznych występują identyczne zjawiska. Jeżeli chcemy pobierać z baterii prąd o dużym natężeniu, to musimy w tym celu zastosować gruby przewód elektryczny (duża średnica). Dla przepływu małych prądów wystarczają cienkie przewody.
2. **Przepływ wody** – pod tym rozumiemy ilość wody mierzoną np. w litrach, przepływającą przez rurę w określonym czasie. Woda przepływa zawsze tylko wewnątrz rury. Woda robi zakręty i zmienia swój bieg zgodnie z kształtem i biegiem rury. Wpływa ona we wszelkie odgałęzienia odchodzące od rury głównej. Główny strumień wody rozdziela się do wszystkich rur dołączonych do rury głównej. Suma ilości wody w powstałych w ten sposób strumieniach gałęziowych jest oczywiście równa ilości wody w strumieniu płynącym w rurze głównej – I prawo Kirchhoffa. Podobnie jest w elektronice, gdzie przepływ prądu elektrycznego odbywa się w przewodzie elektrycznym. Ilość przepływającego przez przewód prądu, czyli tzw. natężenie prądu (jednostka natężenia prądu amper – (A)). Woda nie płynie, gdy kran jest zakręcony. Prąd elektryczny nie może płynąć, jeżeli przerwany jest przewód. Przerwa w przewodzie powstaje przez otwarcie np. wyłącznika.

# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

W wielu przypadkach skomplikowane procesy można wytłumaczyć na podstawie prostych, znanych nam już zjawisk występujących np. w instalacji wodociągowej.

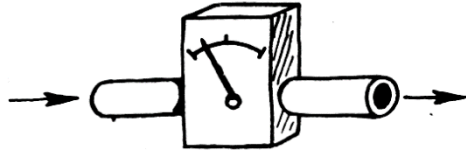
W instalacji wodociągowej występują cztery ważne wielkości fizyczne, które mają swoje odpowiedniki w przewodzie elektrycznym.

**3.Ograniczenia w przepływie prądu** (opór, rezystancja) – Woda na pewno ma utrudniony przepływ jeżeli wewnątrz rury jest np. owapnowane i chropowate. Rura taka jest złym przewodem. Woda z trudem przeciska się przez nią. Dobrym przewodem dla wody będzie na pewno rura o gładkiej powierzchni wewnętrznej. Nie hamuje ona strumienia wody. Przy przepływie prądu elektrycznego występują podobne problemy. Istnieją materiały, takie jak np. złoto, srebro, aluminium i miedź, które dobrze przewodzą prąd elektryczny. W tych materiałach elektrony, będące elementarnymi nośnikami prądu elektrycznego, mogą bez trudu przeskakiwać od jednego atomu do drugiego, tworząc prąd elektryczny. W przypadku złych materiałów przewodzących, takich jak np. żelazo lub węgiel, elektrony poruszają się z trudem.

**4.Ciśnienie** wody jest niezbędne do powstania przepływu wody. Im większe jest ciśnienie wody, tym łatwiej woda pokonuje wszelkie opory i przeszkody w złym rurociągu jeżeli jednak ciśnienie wody będzie za duże, to może nastąpić pęknięcie rury. Ciśnienie wody może być wytworzone przez pompy wodne. Źródłem ciśnienia może też być wieża ciśnień. W tym przypadku ciśnienie w rurociągu powstaje pod wpływem ciężaru wody znajdującej się w zbiorniku umieszczonym wysoko nad poziomem np. ziemi (ciśnienie hydrostatyczne). Ciśnienie wody jest wielkością równoznaczną z napięciem elektrycznym w elektronice. Napięcie elektryczne jest niezbędne do powstania przepływu prądu. Wywołuje ono ukierunkowany ruch elektronów w przewodniku, tworzący prąd elektryczny.

# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

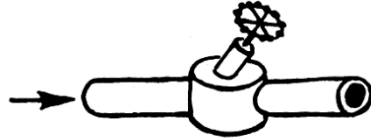
Pomiar przepływu wody



Pomiar prądu elektrycznego



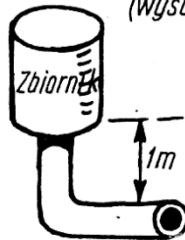
Zawór odcinający przepływ wody



Wyłącznik przerywający przepływ prądu elektrycznego



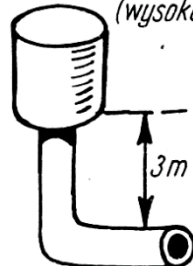
Niskie ciśnienie wody  
(wysokość 1m)



Niskie napięcie elektryczne



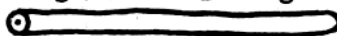

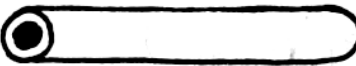
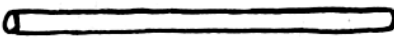

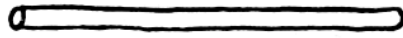

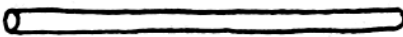
Duże ciśnienie wody  
(wysokość 3m)



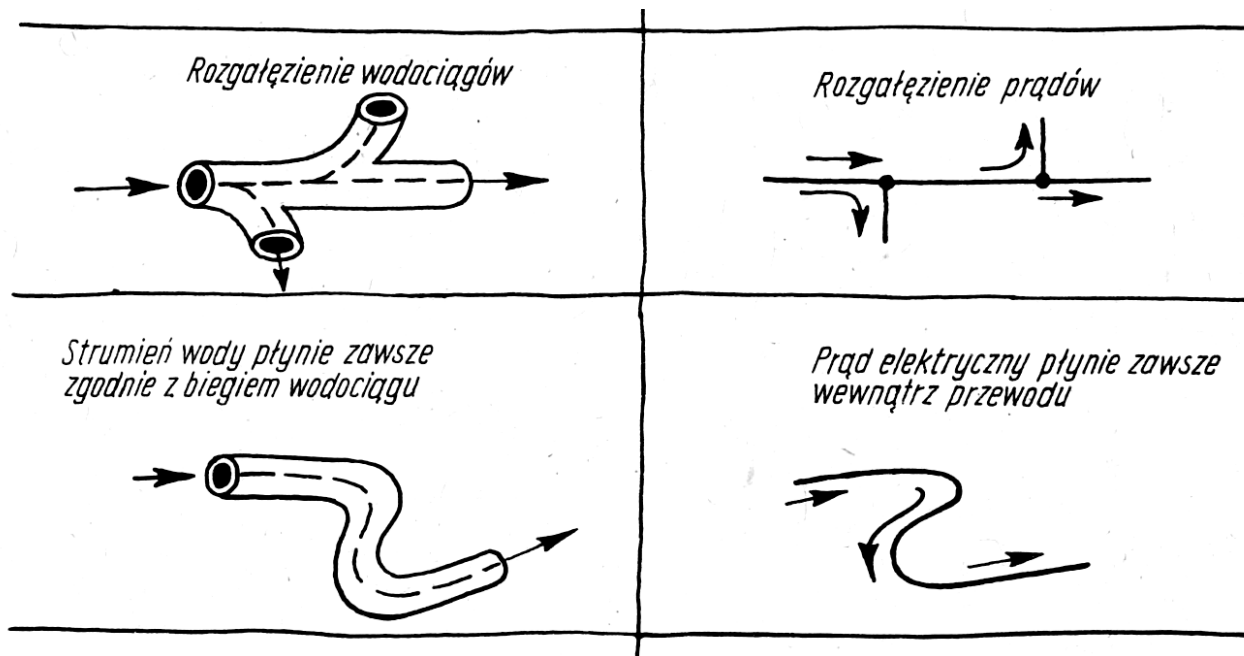
Większe napięcie elektryczne



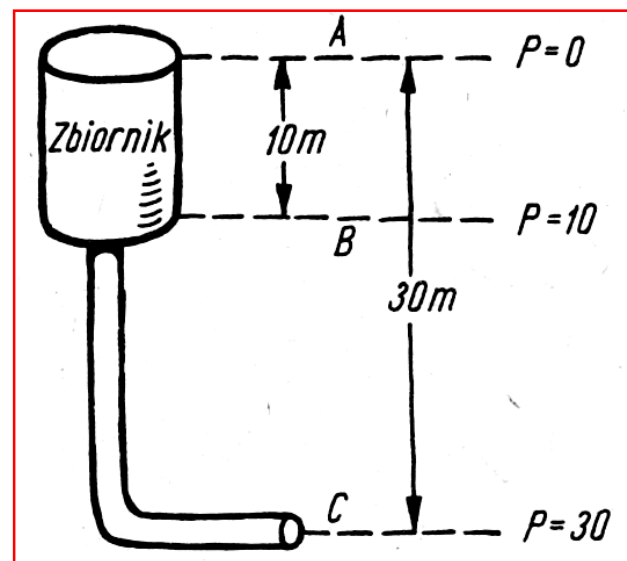
# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

Wodociąg	Przewód elektryczny
<p data-bbox="367 371 685 421">Mały przekrój rury</p>  <p data-bbox="367 471 714 521">Mały strumień wody</p>	<p data-bbox="1207 371 1400 414">Cienki drut</p>  <p data-bbox="1207 471 1371 521">Mały prąd</p>
<p data-bbox="367 614 685 664">Duży przekrój rury</p>  <p data-bbox="367 756 714 806">Duży strumień wody</p>	<p data-bbox="1188 614 1381 664">Gruby drut</p>  <p data-bbox="1188 742 1371 792">Duży prąd</p>
<p data-bbox="183 871 966 921">Dobry wodociąg (gładka powierzchnia wewnętrzna)</p>  <p data-bbox="357 1021 772 1071">Swobodny przepływ wody</p>	<p data-bbox="1188 885 1449 928">Drut miedziany</p>  <p data-bbox="1188 1006 1632 1056">Swobodny przepływ prądu</p>
<p data-bbox="222 1135 840 1185">Zły wodociąg (wewnątrz chropowaty)</p>  <p data-bbox="328 1278 743 1328">Utrudniony przepływ wody</p>	<p data-bbox="1188 1149 1420 1192">Drut żelazny</p>  <p data-bbox="1188 1270 1651 1320">Utrudniony przepływ prądu</p>

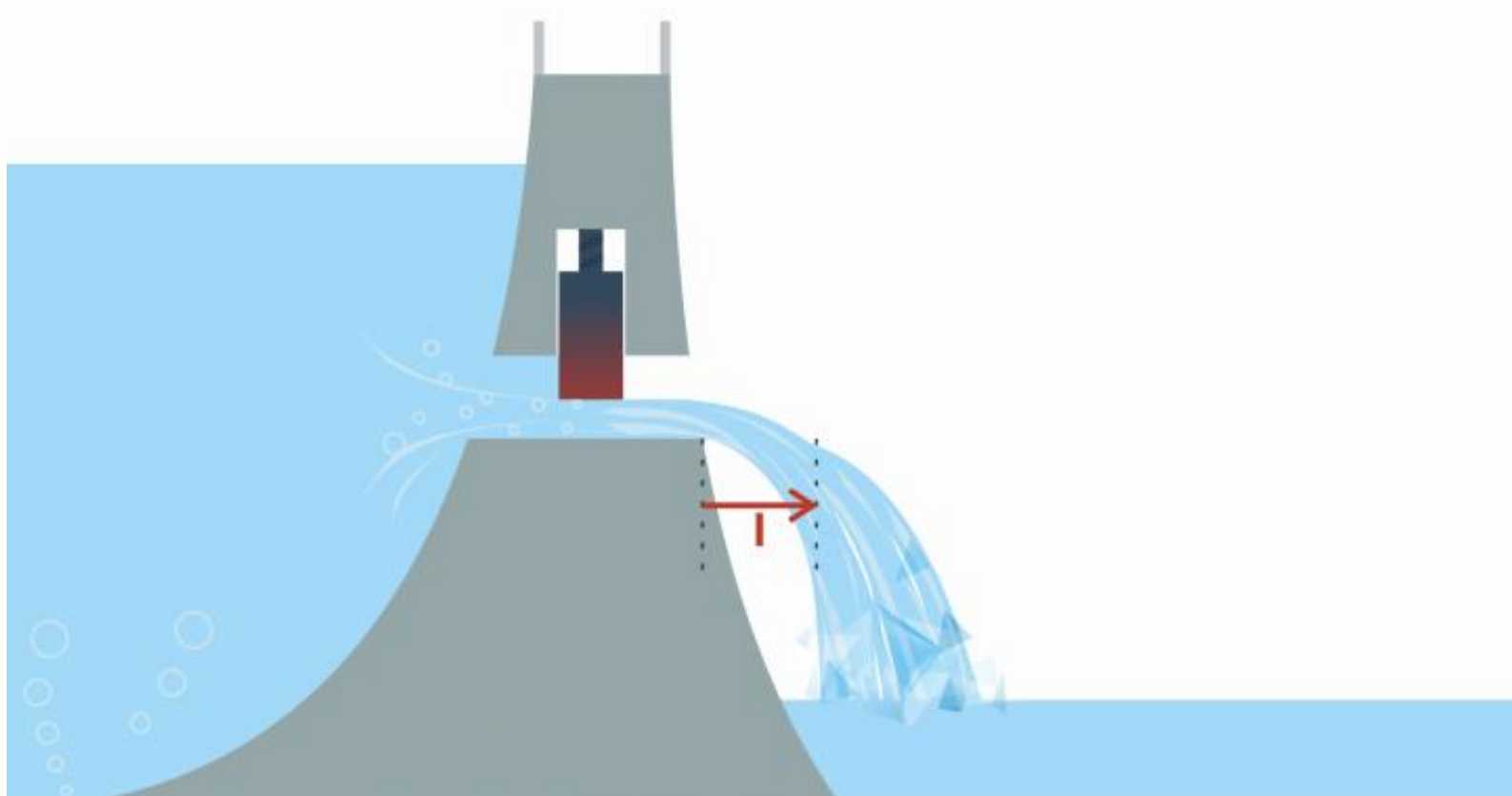
# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???



**Wyjaśnienie pojęcia potencjału jest proste.** Na rysunku przedstawiono wieżę ciśnień. Na powierzchni wody (poziom A) ciśnienie wody jest równe zero. Między poziomami A i B ciśnienie wody wzrasta w kierunku poziomu B. Wysokość słupa wody i jednocześnie jej ciśnienie wzrasta też między poziomami B i C. Możemy więc powiedzieć, że na poziomie A ciśnienie wody jest równe zero, a największą wartość osiąga w rurze znajdującej się na poziomie C. Między poziomami A i C występuje spadek ciśnienia lub też różnica potencjałów ciśnienia. Biegunami pomiarowymi są w tym przypadku potencjały ciśnienia poziomu A i C.



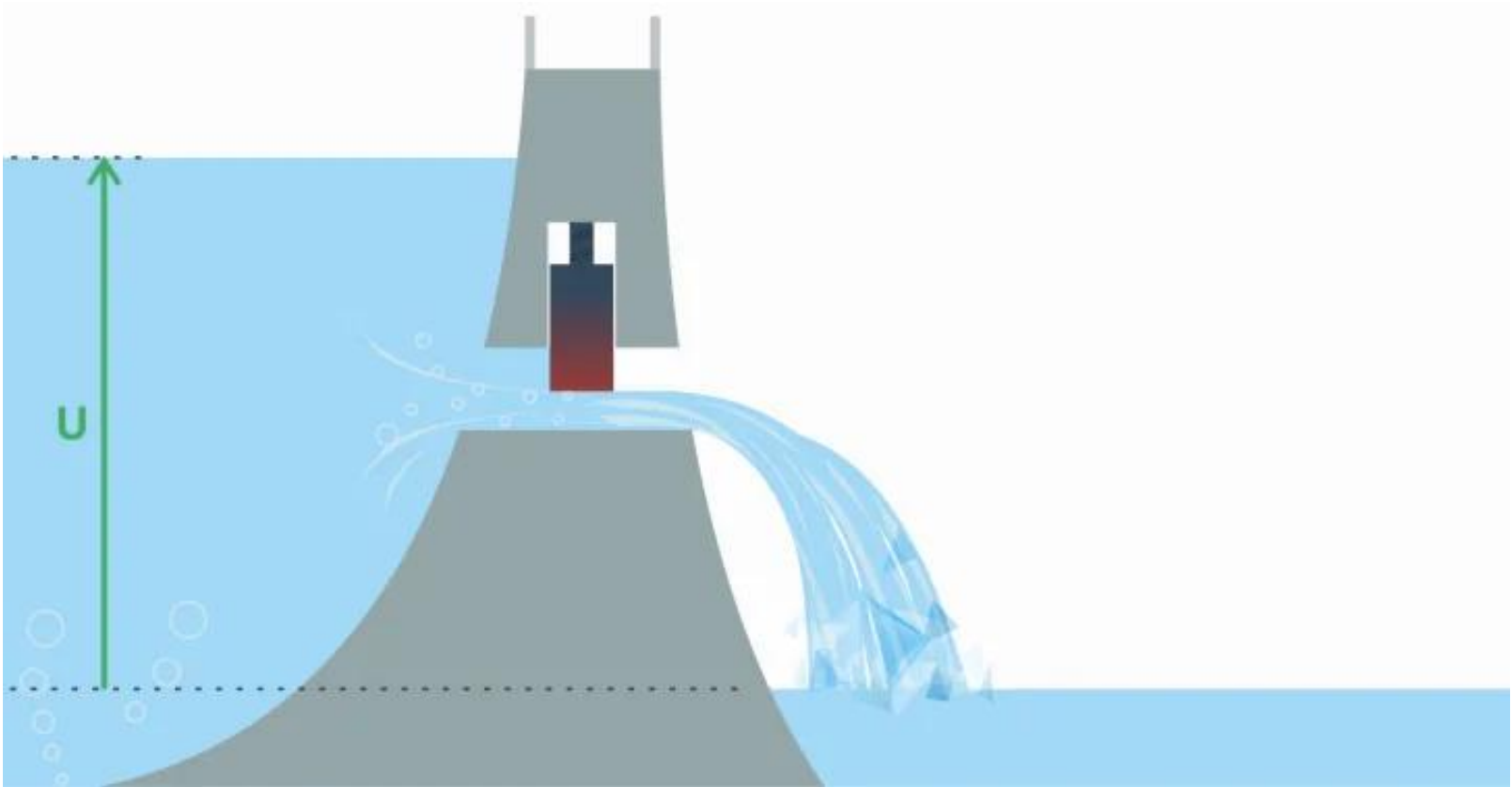
## CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???



**NATEŻENIE PRĄDU** można przyrównać do tego, jak szybko woda wylatuje przez śluzę. Im szybciej woda będzie się wydostawała, tym dalej zostanie „wyrzucona” poza tamę.

**Prędkość wody wylatującej przez śluzę w tamie może symbolizować wartość prądu**

## CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

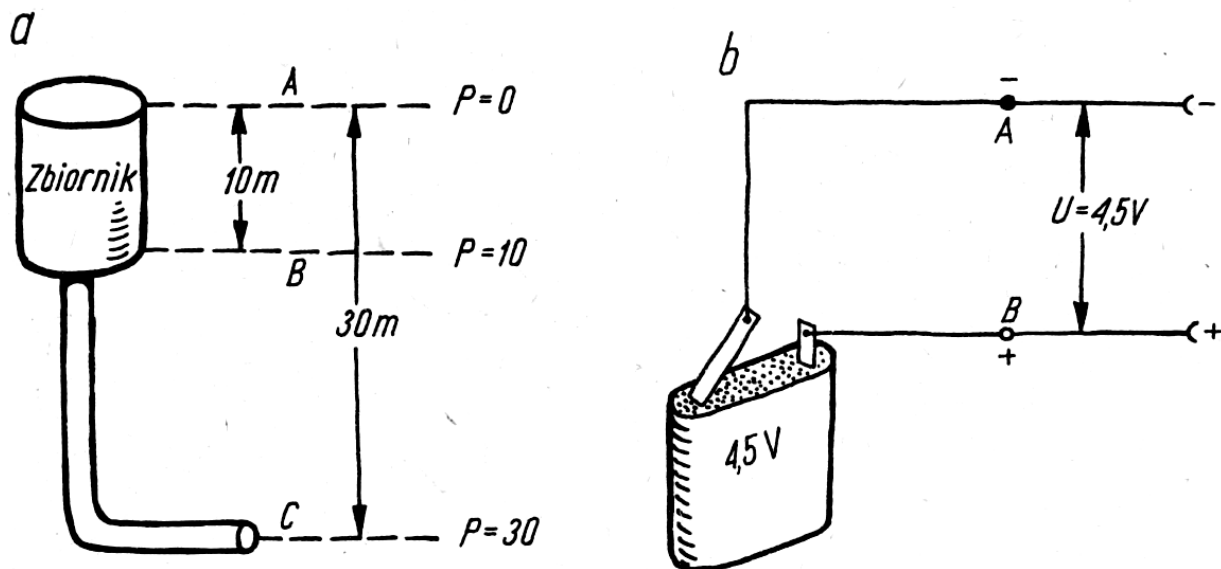


Poziom wody (**NAPIĘCIA**) mierzymy między dwoma umownymi punktami. Już teraz widać, że im wody będzie więcej, tym szybciej będzie wypływała przez śluzę w tamie.

**Wysokość wody przed tamą może symbolizować wartość napięcia**

## CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

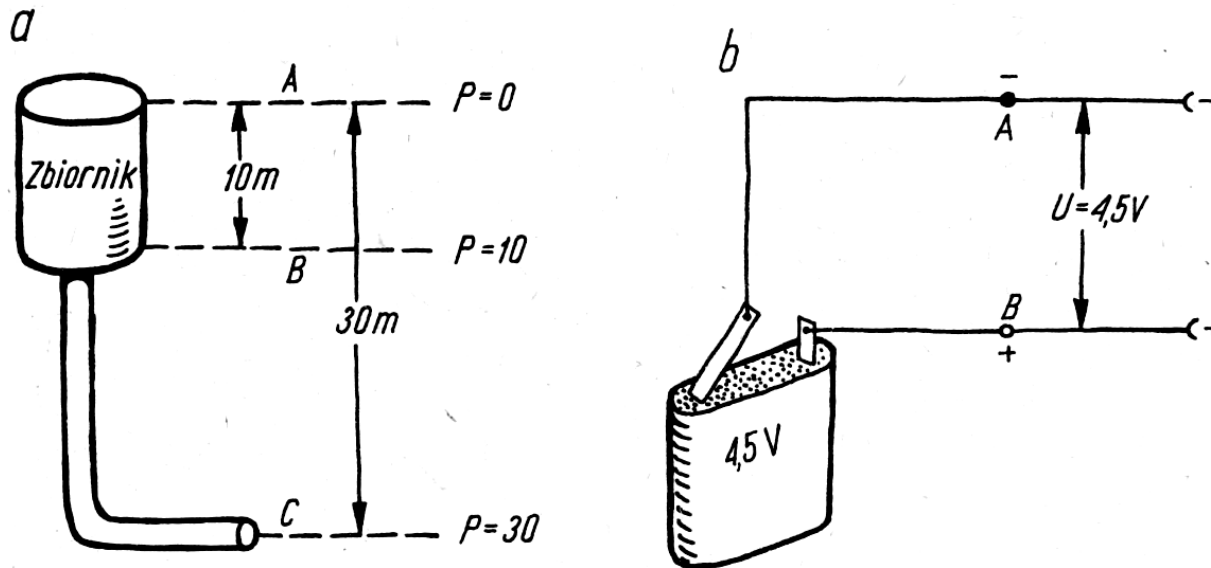
A teraz przystąpmy od razu do „polaryzacji” ciśnienia. Mierząc ciśnienie poziomu C względem poziomu A stwierdzamy, że jego wartość wynosi np. 30.



Ciśnienie zmierzone na poziomie C ma wartość dodatnią. Wykonajmy teraz pomiar odwrotny, tzn. od poziomu C o ciśnieniu dodatnim do poziomu A, którego ciśnienie jest równe zero. Na poziomie A ciśnienie jest więc mniejsze o  $-30$  (minus 30) od ciśnienia na poziomie C. Mówimy wtedy, że na poziomie A ciśnienie ma wartość 30 i jest ujemne względem poziomu C.

# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

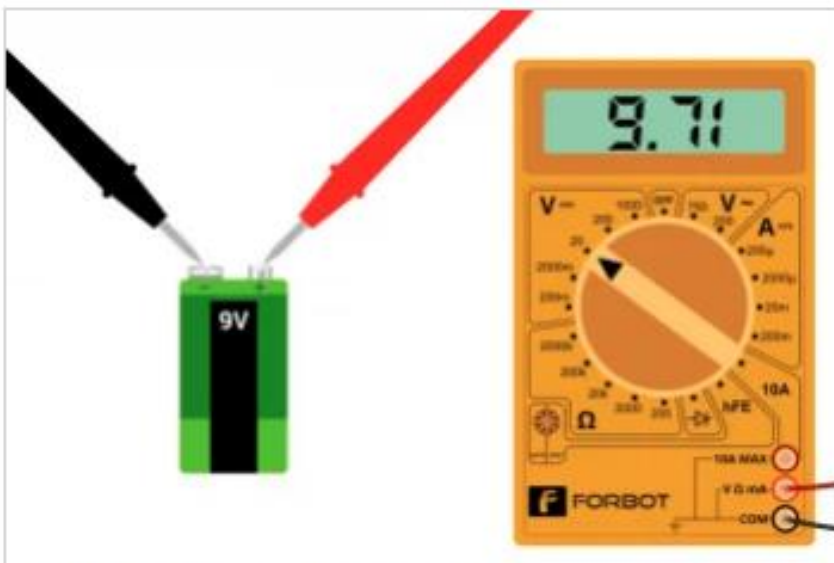
Podobnie jest w przypadku baterii, źródła napięcia elektrycznego. Różnica potencjałów będzie tu również mierzona między dwoma punktami — zaciskami, tak jak to przedstawiono na rys.



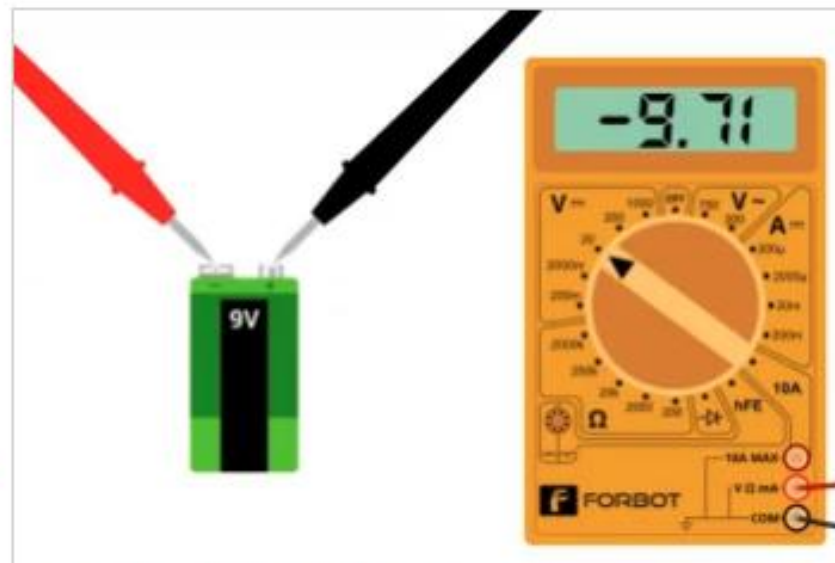
Mierząc napięcie punktu A względem B stwierdzamy, że punkt B jest biegunem dodatnim, a punkt A ujemnym. Potencjał punktu A jest więc ujemny względem potencjału punktu B. W przypadku odwrotnym, tzn. rozpatrując punkt B względem A stwierdzamy, że potencjał punktu B jest dodatni względem punktu odniesienia A.

Ujemny biegun baterii zawiera nadmiar elektronów, a biegun dodatni ich niedomiar. Podczas pracy bateria „dąży” do wyrównania liczby elektronów w obydwu biegunach - przepływ elektronów – przepływ prądu

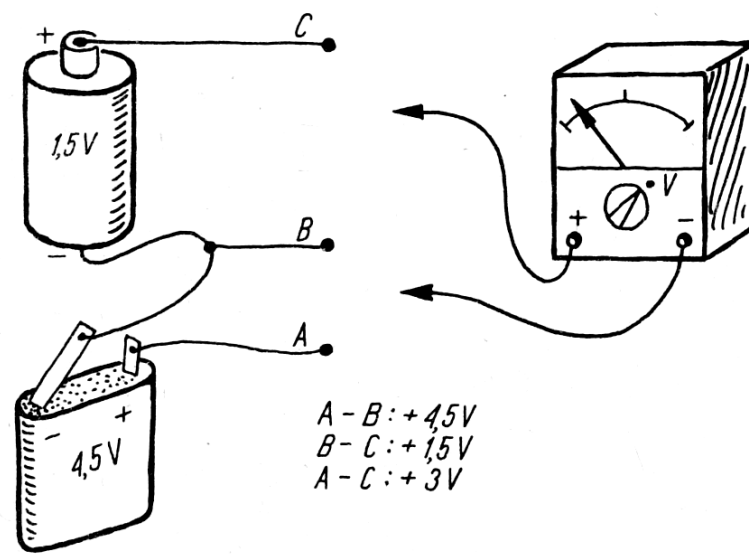
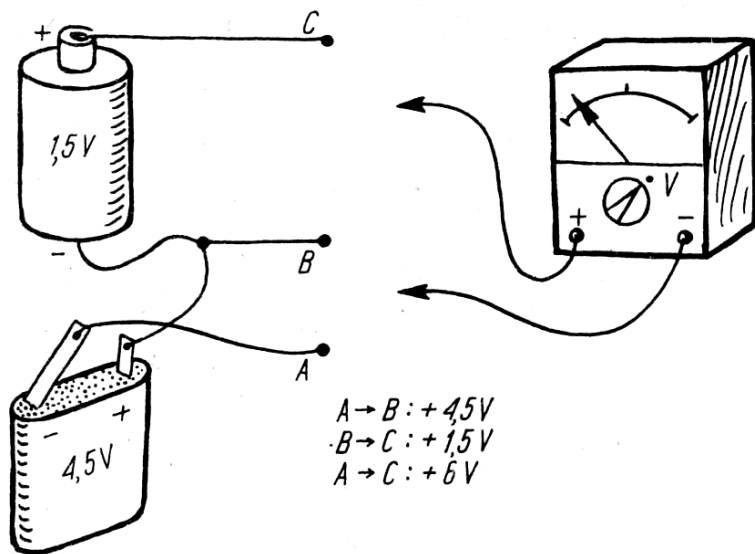
# POLARYZACJA NAPIĘCIA



Pomiar baterii z „poprawnym” podłączeniem sond

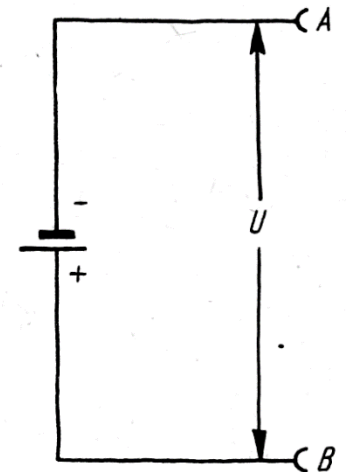
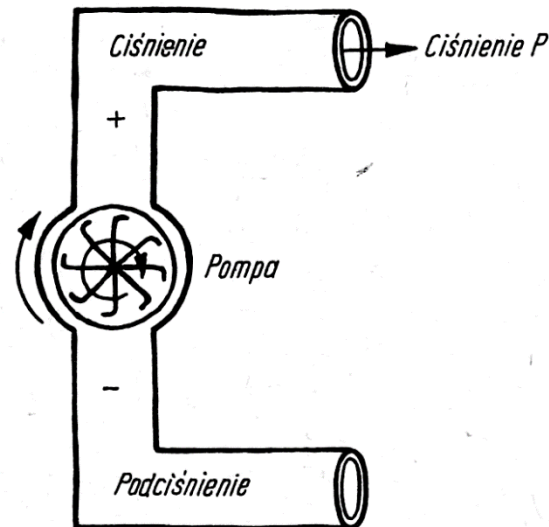
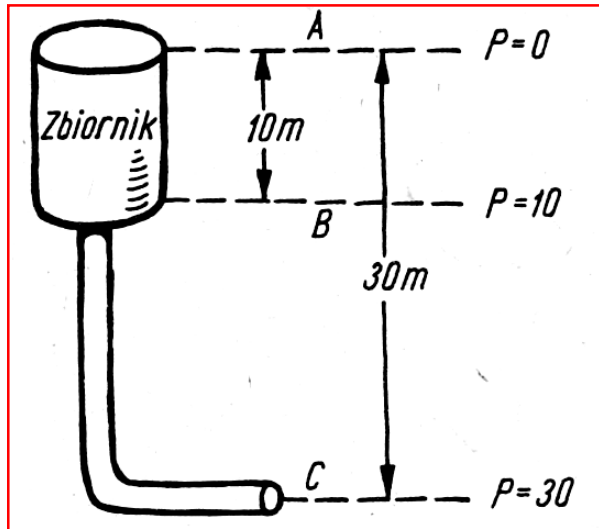


Pomiar baterii z odwrotnym podłączeniem sond



# CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

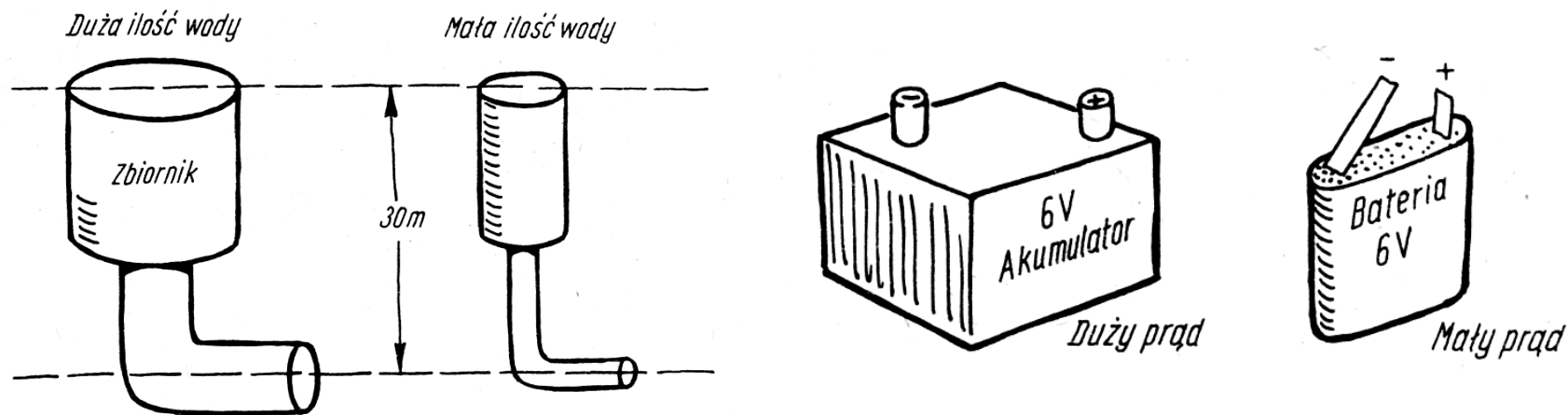
Zarówno w modelu wieży ciśnień, jak i w przypadku baterii występuje stały, niezmienny w czasie stan ciśnienia czy też napięcia elektrycznego.



Tak więc panuje stałe ciśnienie wody w punkcie C i stałe napięcie  $U = 4,5 \text{ V}$ . W obu przypadkach ciśnienie i napięcie nie zmieniają swojego kierunku – są stałe. Polaryzacja zacisków baterii również pozostaje stała. Mówimy tu o napięciu stałym. Dla pełnego zrozumienia pojęcia napięcia stałego znów posłużymy się analogią między układem hydraulicznym i elektrycznym. Przedstawiono to na rys. pompa wirnikowa wytwarza ciśnienie wody. Na wyjściu pompy ciśnienie jest dodatnie (+), a na wejściu ujemne (-). Podobna sytuacja występuje w przypadku baterii, również tu znajdujemy biegun dodatni (+) i ujemny (-), między którymi panuje różnica potencjałów mierzona w jednostkach zwanych voltami (V).

## CO MA WSPÓLNEGO WODOCIĄG Z NAPIĘCIEM ELEKTRYCZNYM ???

Źródłami napięcia stałego są dla nas przede wszystkim baterie galwaniczne i akumulatory (panele fotowoltaiczne, prądnice prądu stałego, ...). Mamy więc baterie do latarek kieszonkowych jak również duże baterie w postaci akumulatorów motocyklowych / samochodowych. Na czym polega różnica między dużymi akumulatorami samochodowymi o napięciu np. 6 V a małymi bateriami? Oczywiście, tkwi ona w ich wielkości. Duże akumulatory mają wprawdzie takie samo napięcie co małe baterie, jednakże w porównaniu z nimi mogą dostarczać znacznie większych prądów. Wyobraźmy sobie dwie różne wieże ciśnień, wydajność obydwu wież zależy bezpośrednio od ilości wody zawartej w ich zbiornikach. Ciśnienie wody w obydwu rurociągach jest takie samo, ponieważ wieże mają jednakowe wysokości. Różnią się tylko ilością wody zawartej w obu zbiornikach.



W elektrotechnice mówimy o tzw. pojemności (wydajności) prądowej źródła napięcia, mierzona w jednostkach zwanych amperogodzinami, oznaczanymi krótko przez Ah.

# **PRAWO OHMA**

# PRAWO OHMA

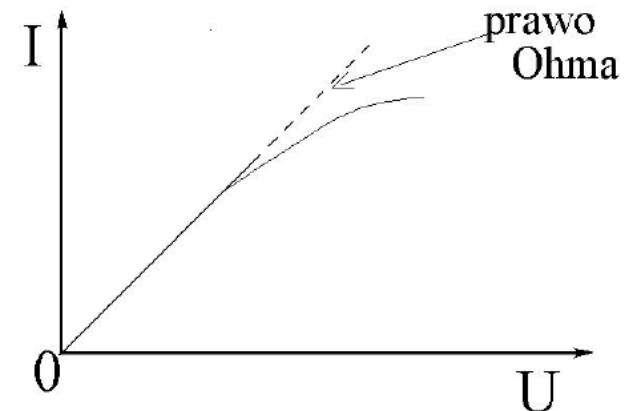
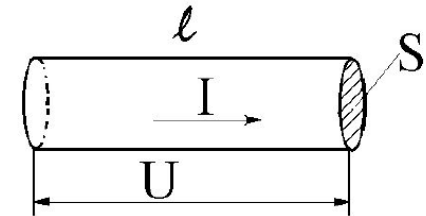
Dla wywołania przepływu prądu elektrycznego w przewodniku niezbędne jest wytworzenie różnicy potencjałów między określonymi jego punktami. Jeżeli będziemy utrzymywać stałe napięcie między końcami odcinka przewodu, to natężenie prądu płynącego przez tę część przewodnika będzie miało stałą wartość.

W r. 1826 G. S. Ohm wykazał, że dla przewodników metalicznych natężenie prądu  $I$ , płynącego przez przewodnik, jest wprost proporcjonalne do napięcia  $U$  na jego końcach.



Georg Simon Ohm (1789 – 1854), matematyk niemiecki, Sformułował (1826) prawo opisujące związek pomiędzy natężeniem prądu elektrycznego, a napięciem elektrycznym (tzw. Prawo Ohma). Badał nagrzewanie się przewodników przy przepływie prądu elektrycznego. Znalazł zależność oporu od formy geometrycznej przewodnika. Na jego cześć jednostkę rezystancji nadano nazwę om  $\rightarrow \Omega$ .

$$\frac{I}{U} = \text{const}$$



## PRAWO OHMA



$$U = RI$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$G$  - **KONDUKTANCJA**

$R$  - **REZYSTANCJA (OPÓR)**

$$G = \frac{1}{R}$$

- Jednostka rezystancji  $R$  jest *om* ( $\Omega$ ),
- Jednostka konduktancji  $G$  - *simens* (S), czyli *odwrotność oma* ( $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$ ).

**Prawo Ohma** – prawo fizyki głoszące proporcjonalność natężenia prądu  $I$  płynącego przez przewodnik do napięcia  $U$  panującego między końcami przewodnika.



$$I = \frac{U}{R}$$

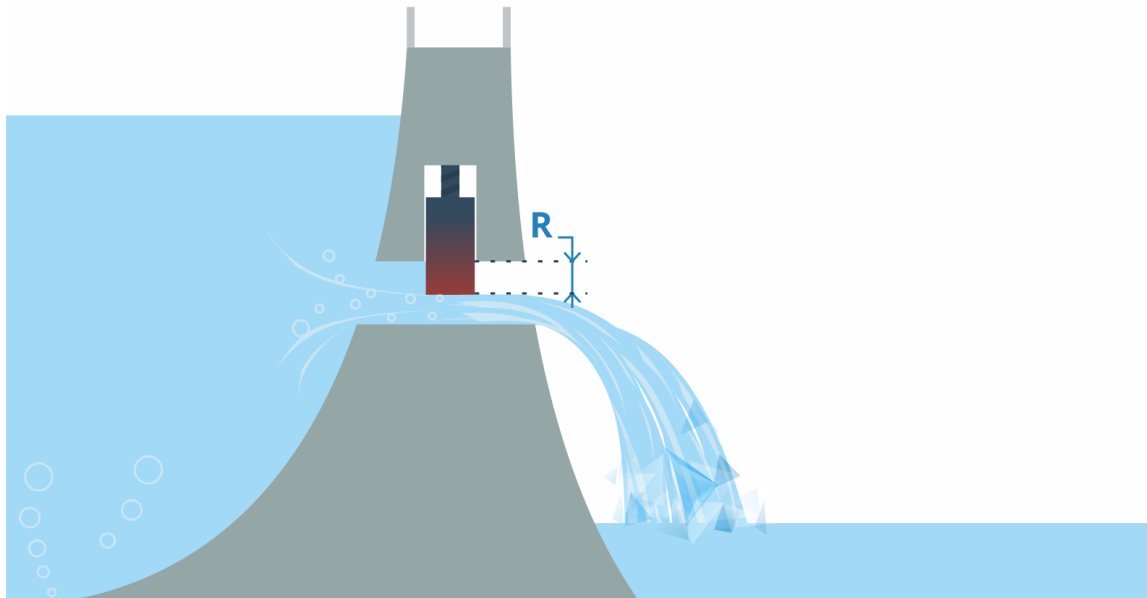
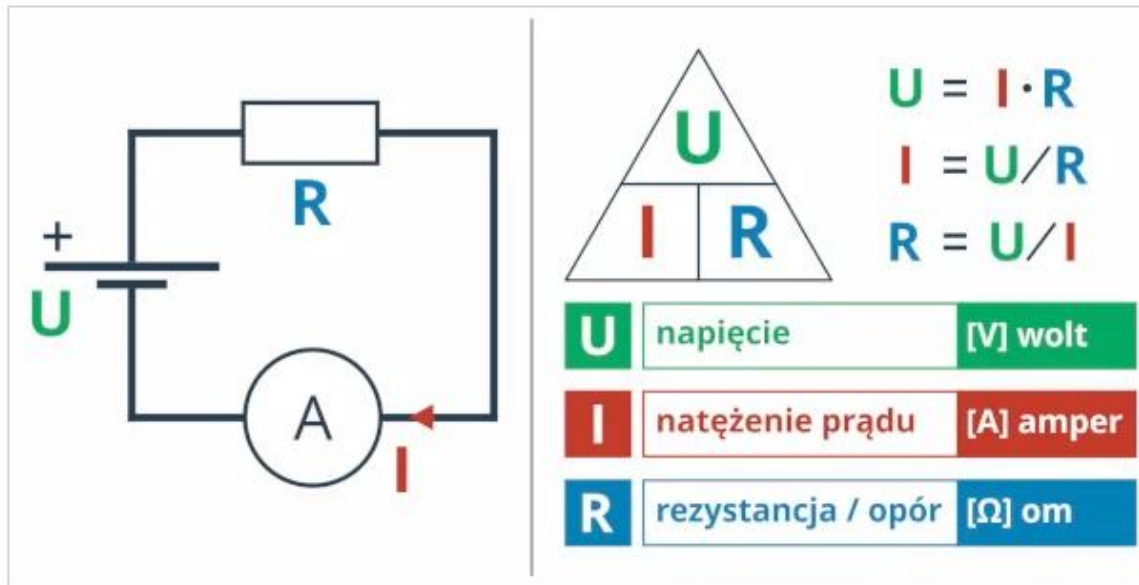


$$U = IR$$



$$R = \frac{U}{I}$$

# PRAWO OHMA



Poziom otwarcia służy w tamie może symbolizować wartość rezystancji (oporu)

# PRAWO OHMA

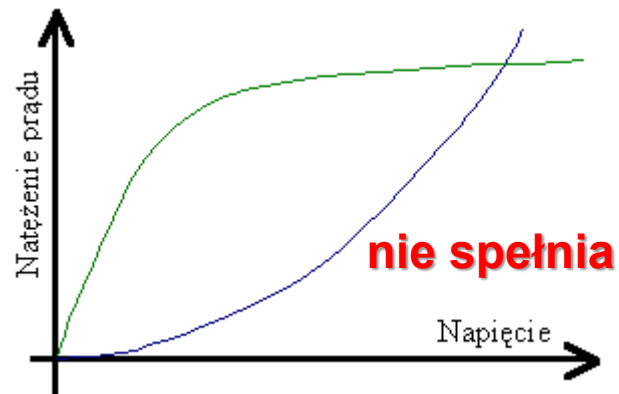
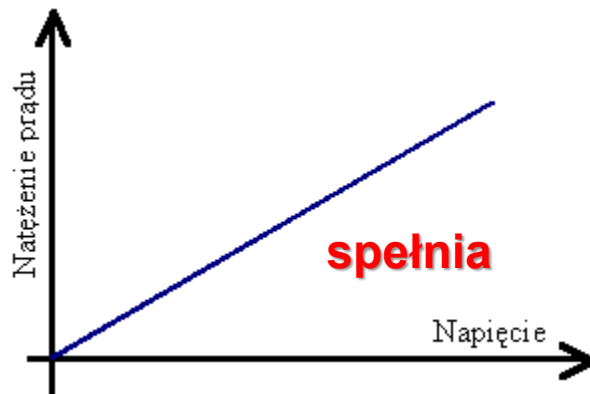
Prawo Ohma mówi nam, że natężenie płynącego przez przewodnik prądu dokładnie „nadaża” za zmianami napięcia.

Gdy napięcie wzrasta 2 – krotnie, wtedy wywołany tym napięciem przepływ prądu też osiągnie natężenie 2 razy większe, gdy napięcie wzrośnie 5 krotnie, to natężenie prądu też powinno wzrosnąć 5 razy w stosunku do wartości początkowej.

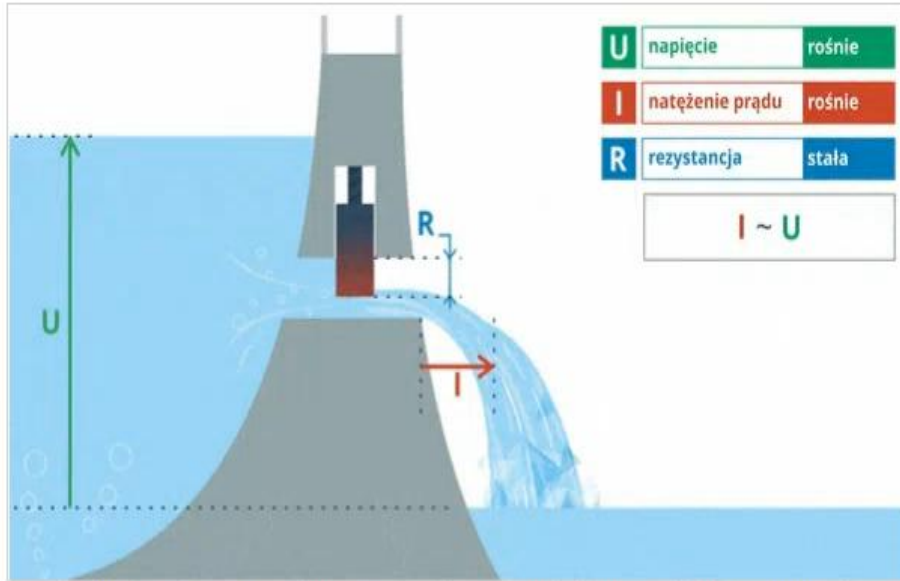
**Natężenie prądu, będące efektem przyłożonego napięcia, zachowuje się proporcjonalnie do swojej przyczyny.**

Prawo Ohma jest spełniane przez część materiałów – głównie przez metale i materiały ceramiczne. Jest jednak dużo substancji które prawa Ohma nie spełniają, czyli natężenie przepływającego przez nie prądu zmienia się w sposób nieproporcjonalny do napięcia.

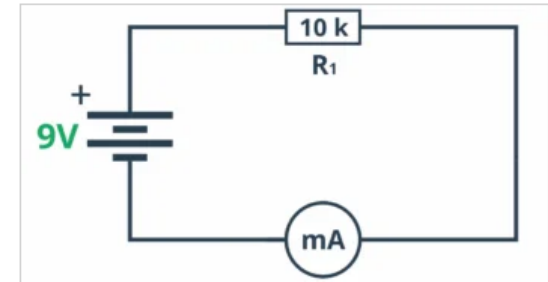
Materiały, które się do niego stosują, nazywamy przewodnikami omowymi lub "przewodnikami liniowymi"



# PRAWO OHMA



Analogia wodna: przy stałym oporze zwiększenie napięcia prowadzi do wzrostu prądu

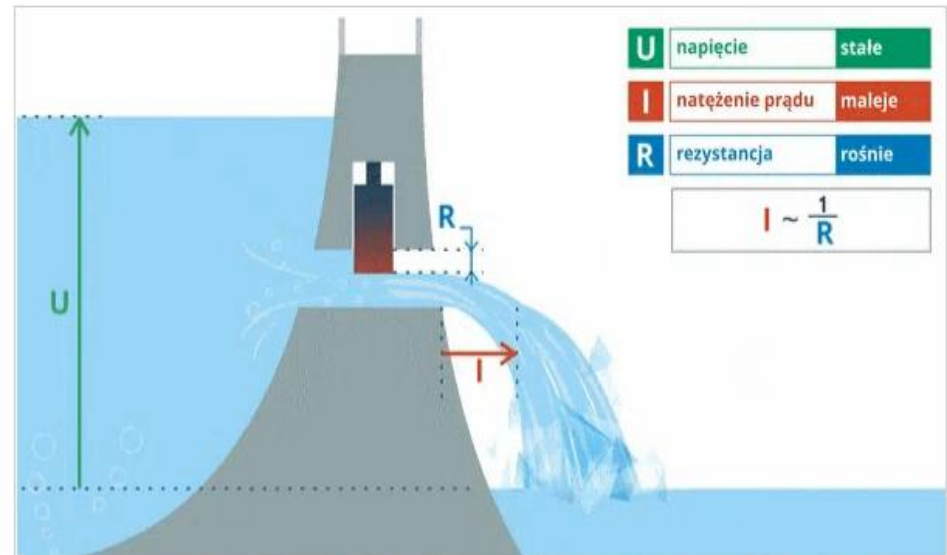


Układ testowy do pomiaru prądu

Na początku sprawdzenie teoretyczne. Korzystamy z poznanych wcześniej wzorów:

$$U = 9 \text{ V}, R = 10 \text{ k}\Omega, I = ?$$

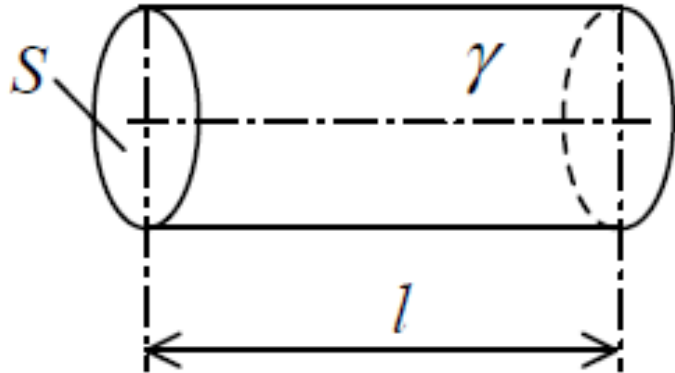
$$I = U / R = 9 \text{ V} / 10000 \Omega = 0,0009 \text{ A} = \mathbf{0,9 \text{ mA}}$$



Analogia wodna: przy stałym napięciu zmniejszenie oporu prowadzi do wzrostu prądu

# **REZYSTANCJA ODCINKA PRZEWODU**

## REZYSTANCJA ODCINKA PRZEWODU



W przypadku odcinka przewodu, tzn. elementu przewodzącego o długości  $l$ , stałym przekroju  $S$  i stałej konduktywności  $\gamma$  (w całej objętości) przewodu

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \frac{\rho \cdot l}{S} \rightarrow G = \frac{S}{\rho \cdot l} = \frac{\gamma \cdot S}{l}$$

$$\rho = \frac{R \cdot S}{l} \rightarrow \gamma = \frac{G \cdot S}{l}$$

$\gamma$  - konduktywność (przewodność właściwa)  $\rightarrow \text{S} \cdot \text{m} / \text{S} \cdot \text{mm}^2 / \text{m}$

$\rho$  - rezystywność (rezystancja (opór) właściwy)  $\rightarrow \Omega \cdot \text{m} / \Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}$

## REZYSTANCJA ODCINKA PRZEWODU

$$\rho = \frac{R \cdot S}{l} \rightarrow \gamma = \frac{l}{R \cdot S}$$

rezystywność – opór elektryczny przewodnika wykonanego z danego materiału o przekroju poprzecznym 1 m<sup>2</sup> i długości 1 m

Nazwa materiału	Rezystywność $\rho$		Konduktywność $\gamma$	
	$\Omega \cdot m$	$\Omega \cdot mm^2/m$	S/m	$m/(\Omega \cdot mm^2)$
Srebro	$1,62 \cdot 10^{-8}$	0,0162	$62,5 \cdot 10^6$	62,5
Miedź przewodowa	$1,75 \cdot 10^{-8}$	0,0175	$57 \cdot 10^6$	57
Aluminium	$2,83 \cdot 10^{-8}$	0,0283	$35,3 \cdot 10^6$	35,3
Cynk	$6,3 \cdot 10^{-8}$	0,063	$15,9 \cdot 10^6$	15,9
Platyna	$11,1 \cdot 10^{-8}$	0,111	$9 \cdot 10^6$	9
Cyna	$12 \cdot 10^{-8}$	0,12	$8,33 \cdot 10^6$	8,33
Manganin	$44 \cdot 10^{-8}$	0,44	$2,3 \cdot 10^6$	2,3
Konstantan	$48 \cdot 10^{-8}$	0,48	$2,1 \cdot 10^6$	2,1
Chromonikielina	$110 \cdot 10^{-8}$	1,10	$0,91 \cdot 10^6$	0,91

$\rho$  - opór (rezystancja) właściwa → **REZYSTYWNOSĆ**

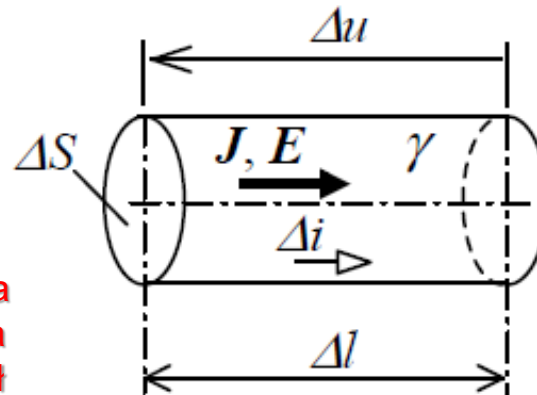
# **PRAWO JOULE`A**

# PRAWO JOULE`A

Energia dostarczana ze źródła do elementu rezystancyjnego wydziela się w nim w postaci ciepła



**James Prescott Joule**  
(1818-1889), fizyk brytyjski,  
badacz zjawisk termodynamicznych i elektrodynamicznych (prawo Joule'a - Lenza, zjawisko Joule'a - Thomsona), sformułował zasadę zachowania energii uwzględniającą zjawiska cieplne i elektryczne, wyznaczył mechaniczny równoważnik ciepła, tj. współczynnik liczbowy pomiędzy jednostkami mechanicznymi i cieplnymi.



Przy przepływie ładunku  $\Delta Q$  w czasie  $dt$  przez elementarną rurkę prądu wykonywana jest praca

$$d\Delta W = \Delta u \cdot \Delta Q = \Delta u \cdot \Delta i \cdot dt = \Delta R \cdot \Delta i^2 \cdot dt = \Delta G \cdot \Delta u^2 \cdot dt$$

Moc chwilowa prądu elektrycznego w elementarnej rurce wynosi

$$dp = \frac{d\Delta W}{dt} = \frac{\Delta u \cdot \Delta Q}{dt} = \frac{\Delta u \cdot \Delta i \cdot dt}{dt} = \Delta u \cdot \Delta i = \Delta R \cdot \Delta i^2 = \Delta G \cdot \Delta u^2$$

## PRAWO JOULE'A

Zgodnie z zasadą zachowania energii, praca wykonana nad przemieszczeniem ładunku  $Q$  (energia wydzielająca się w czasie  $t$  musi) być równa energii cieplnej, wydzielanej w przewodniku.

$$W = Q = \int_0^t p \cdot dt$$

Przy prądzie stałym

$$W = Q = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = G \cdot U^2 \cdot t$$

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot U^2$$

Ilość ciepła wydzielanego w czasie przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik elektryczny jest wprost proporcjonalna do iloczynu oporu elektrycznego przewodnika, kwadratu natężenia prądu i czasu jego przepływu.

Prawo Joule'a, zwane również prawem Joule'a - Lenza

# **TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI**

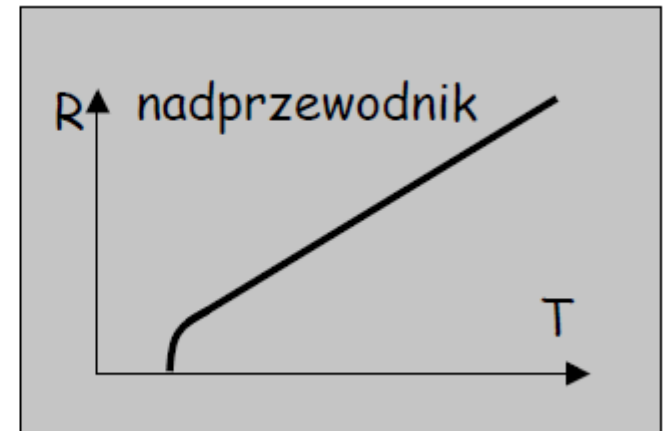
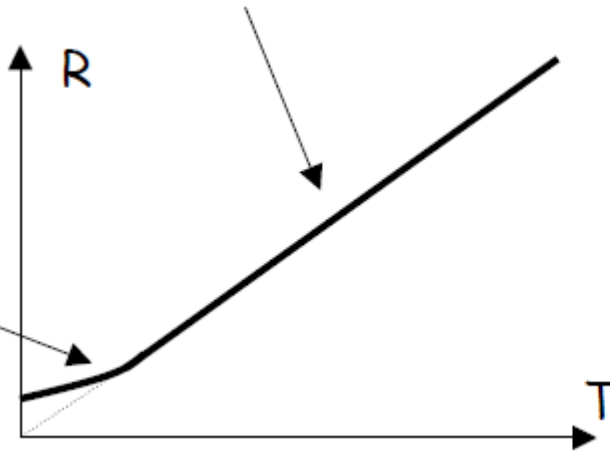
# TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI

**METALE :** Metal o doskonałej sieci krystalicznej przewodzi prąd bez oporu: każde odstępstwo od doskonałego ułożenia powoduje rozpraszanie elektronów: rezystancja (opór) elektryczny.

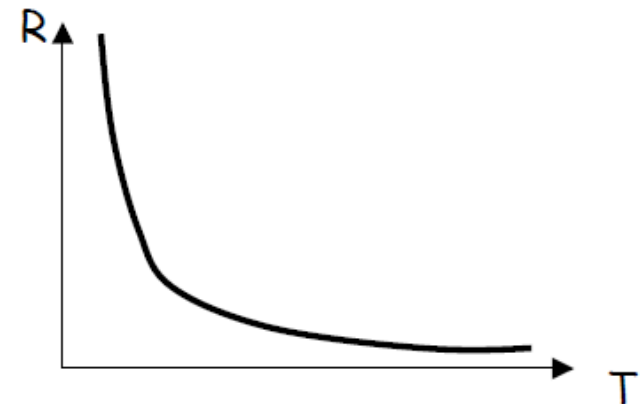
- drgania sieci krystalicznej (fonony)

$T \uparrow \rightarrow R \uparrow$

- domieszki (rezystancja w niskich temperaturach nie dąży do 0)



**PÓŁPRZEWODNIKI:** Czym wyższa temperatura, tym więcej elektronów może uczestniczyć w przewodnictwie: rezystancja (opór) maleje ze wzrostem temperatury



# TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI

W nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego elektrony te są w bezustannym chaotycznym ruchu. Ruch elektronów swobodnych hamowany jest głównie przez oddziaływania z siecią krystaliczną:

- poprzez rozpraszanie na fononach, dominujące w temperaturach wyższych od 100 K (tzw. opór fononowy)
- poprzez rozpraszanie na domieszkach i defektach sieci krystalicznej (tzw. opór resztkowy), dominujące w temperaturach niższych.

Wraz ze wzrostem temperatury rosną amplitudy drgań atomów sieci krystalicznej wokół położenia równowagi.

W wyniku tego maleje średnia droga swobodna elektronów (droga pomiędzy kolejnymi zderzeniami), maleje czas relaksacji, a w konsekwencji rośnie opór właściwy.

Dla przewodników zależność oporu właściwego od temperatury  $T$  jest w przybliżeniu zależnością liniową, którą można opisać wzorem empirycznym (dla temperatur  $T \leq 473\text{K}$ ):

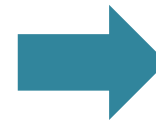
$$R_{T_1} - R_{T_0} = R_{T_0} \cdot \alpha (T_1 - T_0)$$

(dla temperatur  $T \leq 473\text{K}$ )

$$R_{T_1} - R_{T_0} = R_{T_0} \cdot \left( \alpha (T_1 - T_0) + \beta (T_1 - T_0)^2 + \dots \right)$$

(dla temperatur  $T > 473\text{K}$ )

$\alpha, \beta$  – temperaturowe współczynniki (rezystancji) oporu właściwego



$$\alpha \gg \beta$$

## TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI

$$R_{T_1} - R_{T_0} = R_{T_0} \cdot \alpha (T_1 - T_0)$$

$$R_{T_1} - R_{T_0} = R_{T_0} \cdot \left( \alpha (T_1 - T_0) + \beta (T_1 - T_0)^2 + \dots \right)$$

$\alpha, \beta$  – temperaturowe współczynniki (rezystancji) oporu właściwego  
(np. dla wolframu  $\rightarrow \alpha = 4.1 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $\rightarrow \beta = 1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ )

$T_0$  – temperatura odniesienia (np. 273.25K)

$T_1$  – temperatura w której dokonywany jest pomiar

$R_{T_1}$  – (rezystancja) opór w temperaturze  $T_1$

$R_{T_2}$  – (rezystancja) opór właściwy w temperaturze  $T_2$

Ponieważ bezpośrednio mierzoną wielkością jest rezystancja  $R$ , to równanie można przekształcić do postaci:

$$R_{T_1} - R_{T_0} = R_{T_0} \cdot \alpha (T_1 - T_0) \rightarrow R_{T_1} = R_{T_0} (1 + \alpha (T_1 - T_0))$$

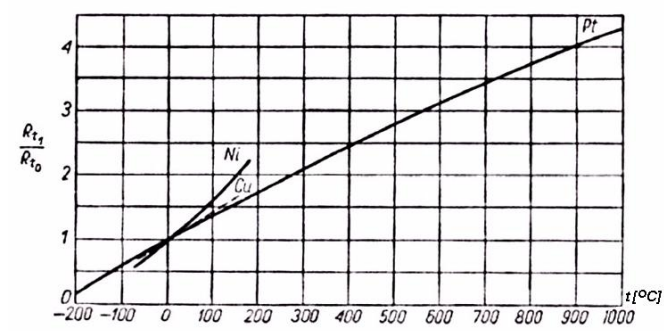


$$\alpha = \frac{R_{T_1} - R_{T_0}}{R_{T_0} \cdot (T_1 - T_0)} \rightarrow \frac{1}{K(^{\circ}\text{C})}$$

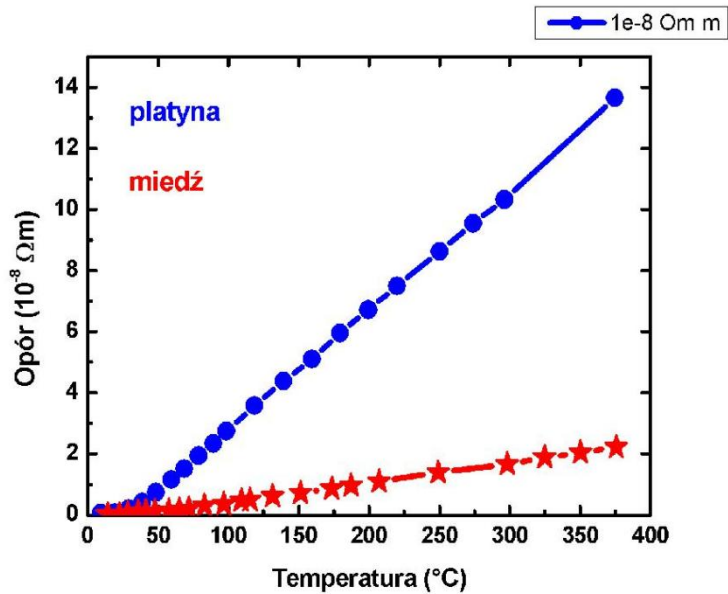
# TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI

Pt100						Ni100		Cu100	
T[°C]	R[Ω]	T[°C]	R[Ω]	T[°C]	R[Ω]	T[°C]	R[Ω]	T[°C]	R[Ω]
0	100,00	200	175,86	400	247,09	600	313,71	800	375,70
5	101,95	205	177,69	405	248,81	605	315,31	805	377,19
10	103,90	210	179,53	410	250,53	610	316,92	810	378,68
15	105,85	215	181,36	415	252,25	615	318,52	815	380,17
20	107,79	220	183,19	420	253,96	620	320,12	820	381,65
25	109,73	225	185,01	425	255,67	625	321,71	825	383,13
30	111,67	230	186,84	430	257,38	630	323,30	830	384,60
35	113,61	235	188,66	435	259,08	635	324,89	835	386,08
40	115,54	240	190,47	440	260,78	640	326,48	840	387,55
45	117,47	245	192,29	445	262,48	645	328,06	845	389,02
50	119,40	250	194,10	450	264,18	650	329,64	850	390,48
55	121,32	255	195,91	455	265,87	655	331,22	855	391,94
60	123,24	260	197,71	460	267,56	660	332,79	860	393,40
65	125,16	265	199,51	465	269,25	665	334,36	865	394,86
70	127,08	270	201,31	470	270,93	670	335,93	870	396,32
75	128,99	275	203,11	475	272,61	675	337,50	875	397,78
80	130,90	280	204,90	480	274,29	680	339,06	880	399,24
85	132,80	285	206,70	485	275,97	685	340,62	885	400,70
90	134,71	290	208,48	490	277,64	690	342,18	890	402,16
95	136,61	295	210,27	495	279,31	695	343,73	895	403,62
100	138,51	300	212,05	500	280,98	700	345,28	900	405,08

$$R_{T1} = R_{T0} (1 + \alpha (T_1 - T_0))$$

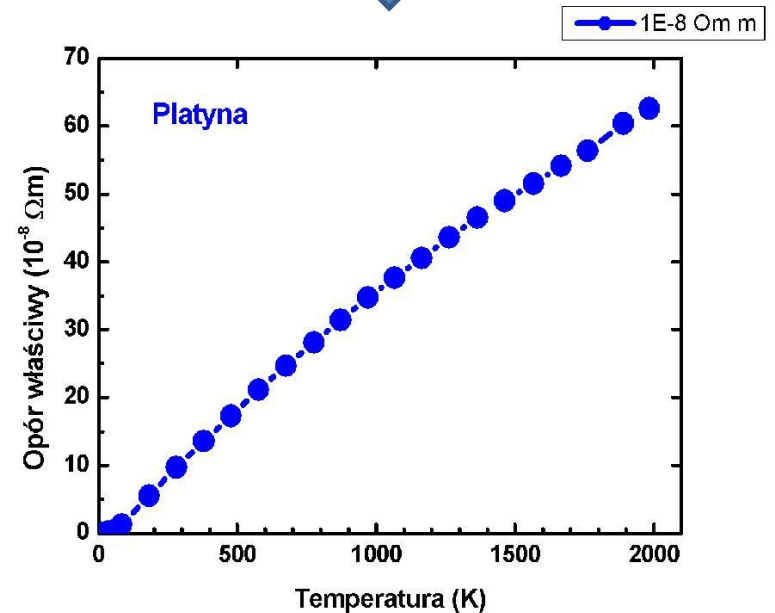


# TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI

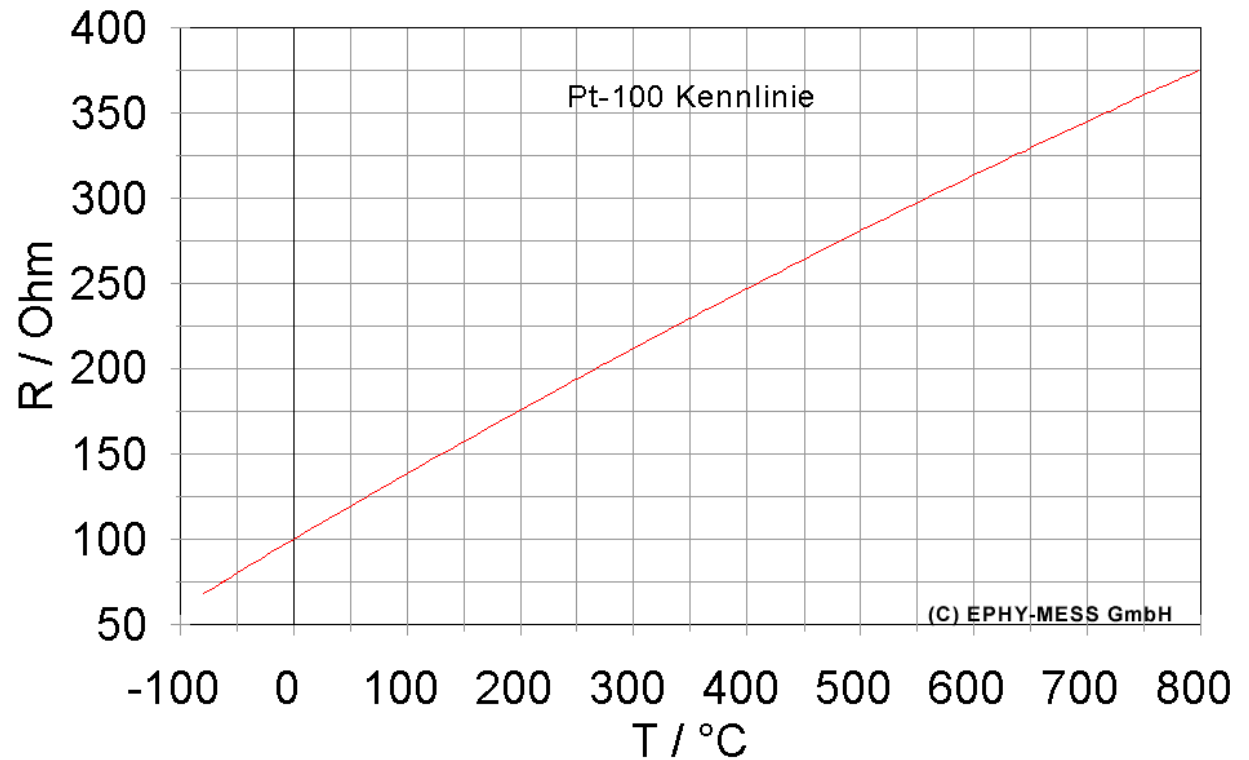


Zależność oporu miedzi i platyny od temperatury

Zależność oporu platyny od temperatury dla wysokich temperatur



# TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK REZYSTANCJI



Termometr rezystancyjny – sensor Pt100

# **ELEMENTY UKŁADÓW I OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH**

Obwód elektryczny jest zbiorem elementów, połączonych ze sobą przewodami w taki sposób, że możliwy jest przepływ prądu elektrycznego.



W ujęciu graficznym, obwód elektryczny można identyfikować ze zbiorem połączonych ze sobą elementów (w najprostszej wersji dwukońcówkowych), aktywnych i pasywnych → SCHEMAT ELEKTRYCZNY.



W ujęciu ściśle analitycznym, obwód jako „model” można by identyfikować z układem równań, opisujących wszystkie powiązania (więzy) wielkości charakteryzujących ten model.

Obydwa ujęcia muszą być równoważne, czyli modelowi graficznemu można przypisać model analityczny i na odwrót.

- Oczkiem obwodu elektrycznego nazywamy zbiór połączonych ze sobą elementów tworzących drogę zamkniętą dla przepływu prądu, mającą tą właściwość, że po usunięciu dowolnego elementu ze zbioru, pozostałe elementy nie tworzą drogi zamkniętej
- Elementami obwodu elektrycznego nazywamy część składową obwodu elektrycznego niepodzielną pod względem funkcjonalnym bez utraty swych właściwości



W elementach obwodu elektrycznego zachodzą trzy rodzaje procesów energetycznych

- Wytwarzanie energii elektrycznej
- Akumulacja energii elektrycznej
- Rozpraszanie energii elektrycznej

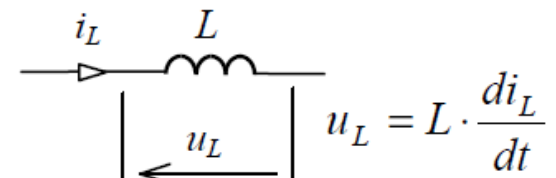
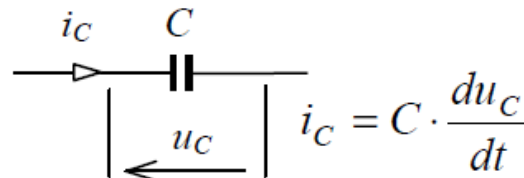
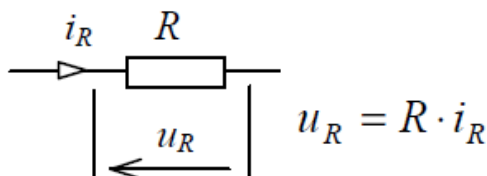
W elementach rzeczywistych obwodu elektrycznego zachodzą dwa a niekiedy trzy rodzaje procesów energetycznych → jeden z nich jest najczęściej dominujący

W elementach idealnych obwodu elektrycznego zachodzi tylko jeden rodzaj procesów energetycznych

Elementy aktywne to niezależne źródła napięcia i prądu (reprezentują urządzenia zasilające), lub źródła sterowane (występują z reguły w modelach obiektów elektronicznych).

Elementy pasywne (R, L, C) symbolizują odpowiednio:

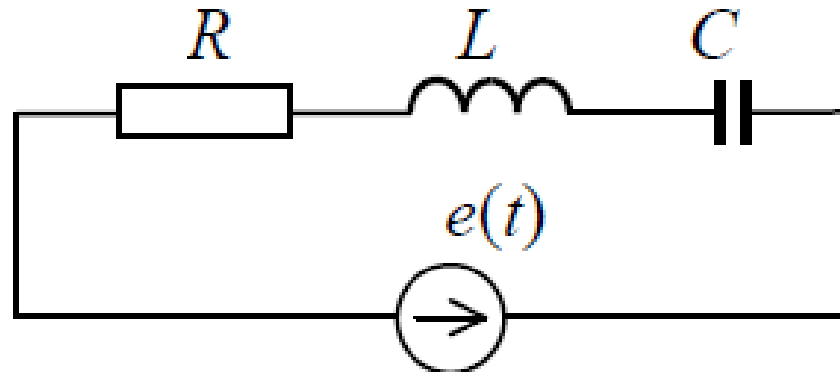
- rozpraszanie energii, czyli przemian energii elektrycznej na ciepłą (lub mechaniczną),
- gromadzenie energii w polu magnetycznym układu,
- gromadzenie energii w polu elektrycznym.



Odwzorowaniem struktury połączeń elementów występujących w obwodzie elektrycznym jest schemat elektryczny.

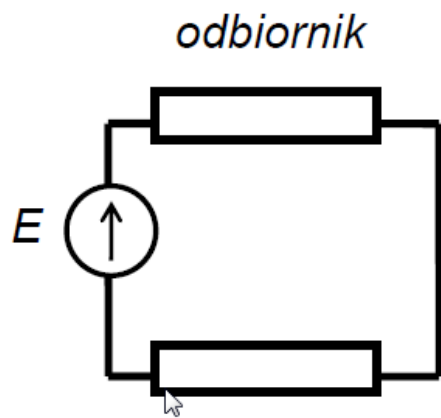
Elementy przedstawia się używając ustalonych normami symboli graficznych i literowych.

Linie między elementami traktuje się jako połączenia bezrezystancyjne (bezoporowe) (rezystancja  $R = 0\Omega$ ) – o ile nie symbolizują umownie jakichś elementów, opisanych symbolami literowymi lub danymi liczbowymi.

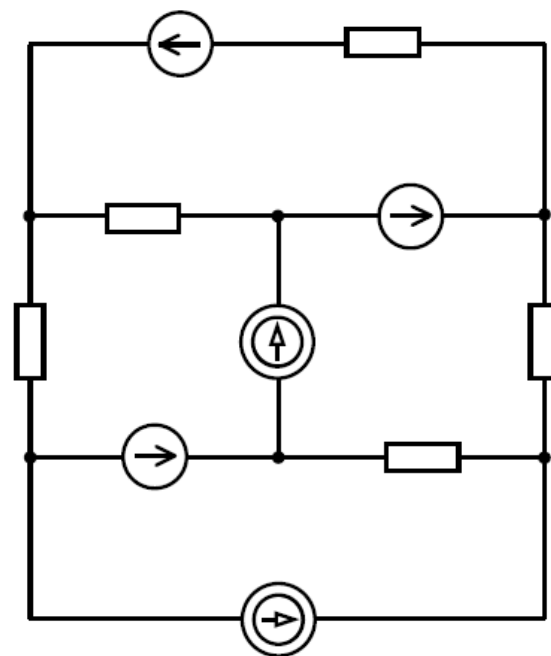
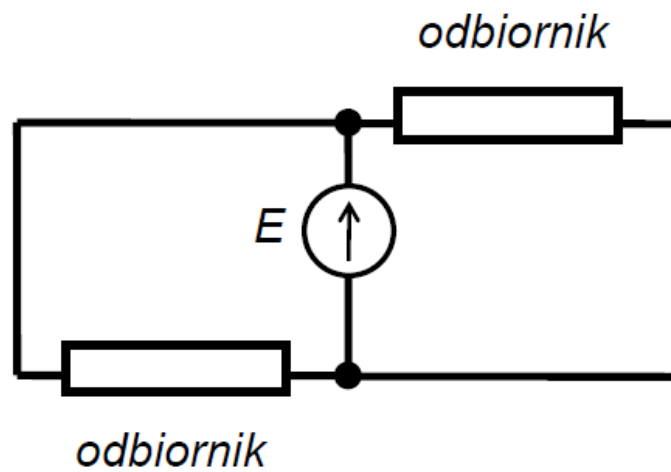


Obwód z połączonymi szeregowo: źródłem napięciowym  $e(t)$  i elementami pasywnymi  $R, L, C$

obwód nierozgałęziony:



obwód rozgałęziony:



Elementy mające zdolność akumulacji oraz rozpraszania energii tworzą tzw. Elementy pasywne.

Element obwodu elektrycznego jest pasywny, gdy spełnia dwa warunki:

- całkowita energia elektryczna doprowadzona do elementu w czasie od  $-\infty$  (minus nieskończoność) do  $t$  jest  $> 0$
- do chwili doprowadzenia napięcia do zacisków elementu prąd w nim nie płynie i odwrotnie – na jego zaciskach nie ma napięcia przed doprowadzeniem prądu

Energia  $W = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt \geq 0$  pobrana przez element

pasywny jest nieujemna

Element, który nie spełnia powyższych warunków, nazywa się elementem aktywnym → np. źródła energii (zdolne są do wytwarzania energii elektrycznej)

Elementy pasywne, w których zachodzi proces przemiany energii elektrycznej w inny rodzaj energii, nazywamy elementami rozpraszającymi lub dyssypatywnymi. Przykładem takiego elementu jest rezystor (opornik)

Elementy pasywne, które charakteryzują się zdolnością gromadzenia (akumulacji) energii, nazywamy elementami zachowawczymi lub konserwatywnymi. Przykładami takich elementów są kondensator i cewka, przy czym w kondensatorze energia jest gromadzona w polu elektrycznym, a w cewce w polu magnetycznym.

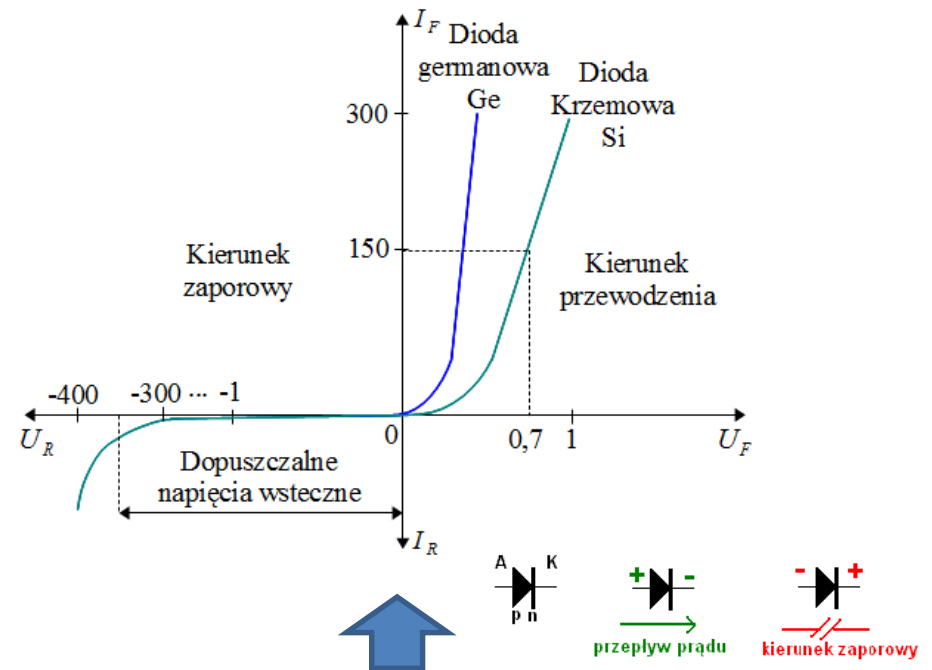
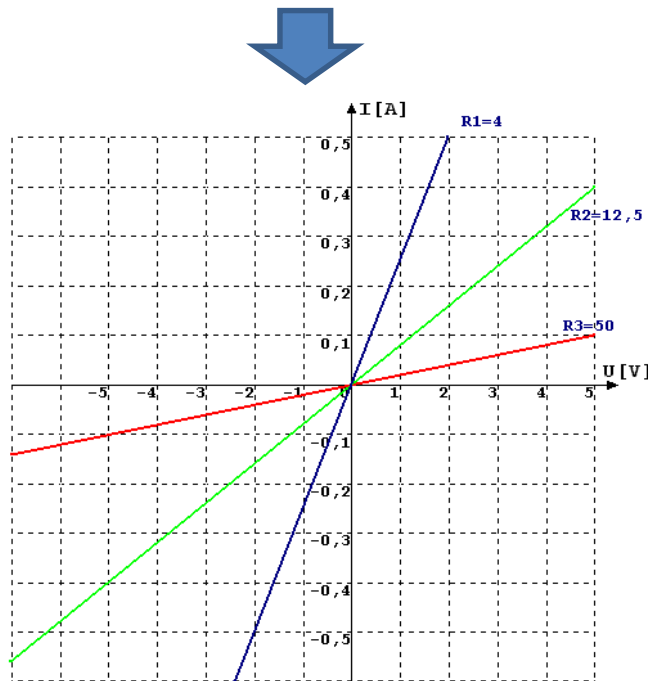
**Elementy idealne obwodu są opisywane równaniami algebraicznymi lub różniczkowymi, wiążącymi napięcie i prąd na zaciskach elementu.**

Jeśli **element idealny obwodu elektrycznego** może być opisany równaniem algebraicznym liniowym lub równaniem różniczkowym liniowym, to element taki nazywamy **elementem liniowym**.

Element opisany równaniem algebraicznym nieliniowym lub równaniem różniczkowym nieliniowym nazywamy **elementem nieliniowym**

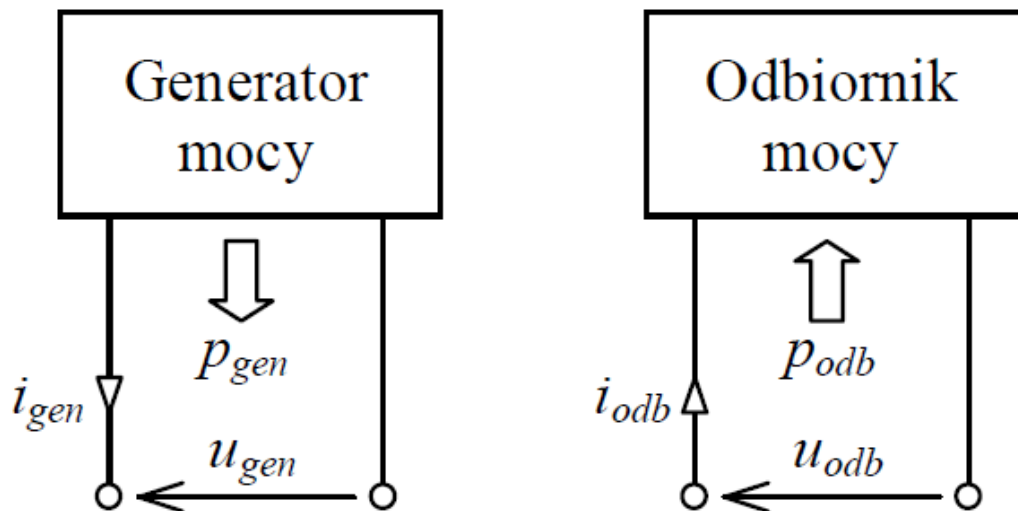
Elementy obwodu elektrycznego mogą być odwracalne lub nieodwracalne

- **Element odwracalny** - ma takie same właściwości niezależnie od sposobu połączenia w obwodzie i niezależnie od biegunowości → np. rezystor



- **Element nieodwracalny** - właściwości zależą od sposobu połączenia w obwodzie i niezależnie od biegunowości → np. dioda półprzewodnikowa

Rola generatora bądź odbiornika mocy elektrycznej, przypisana elementowi lub układowi, znajduje wyraz w odpowiednim strzałkowaniu prądu i napięcia na zaciskach. Jeśli poprzez zaciski moc jest wydawana do obwodu, to stosuje się strzałkowanie generatorowe, jeśli natomiast moc jest poprzez zaciski pobierana, to stosuje się strzałkowanie odbiornikowe.



strzałkowanie generatorowe

strzałkowanie odbiornikowe

Formalnie, każdy element obwodu może być odbiornikiem lub generatorem energii (mocy) elektrycznej.

Zależy to jedynie od konwencji strzałkowania prądu i napięcia: generatorowego – o zgodnych zwrotach tych wielkości, albo odbiornikowego – o zwrotach przeciwnych.

Jeśli zastosowane strzałkowanie nie odpowiada rzeczywistej sytuacji, to iloczyn wielkości zaciskowych ma ujemną wartość, a więc moc (odpowiednio – wydawana lub oddawana) jest ujemna

## OBWÓD PRĄDU STAŁEGO

Obwód elektryczny, w którym wartości prądu wszystkich elementów i wartości napięcia na wszystkich elementach są niezmiennie w czasie, a przy tym nie są wszystkie równe zero, nazywa się obwodem prądu stałego.

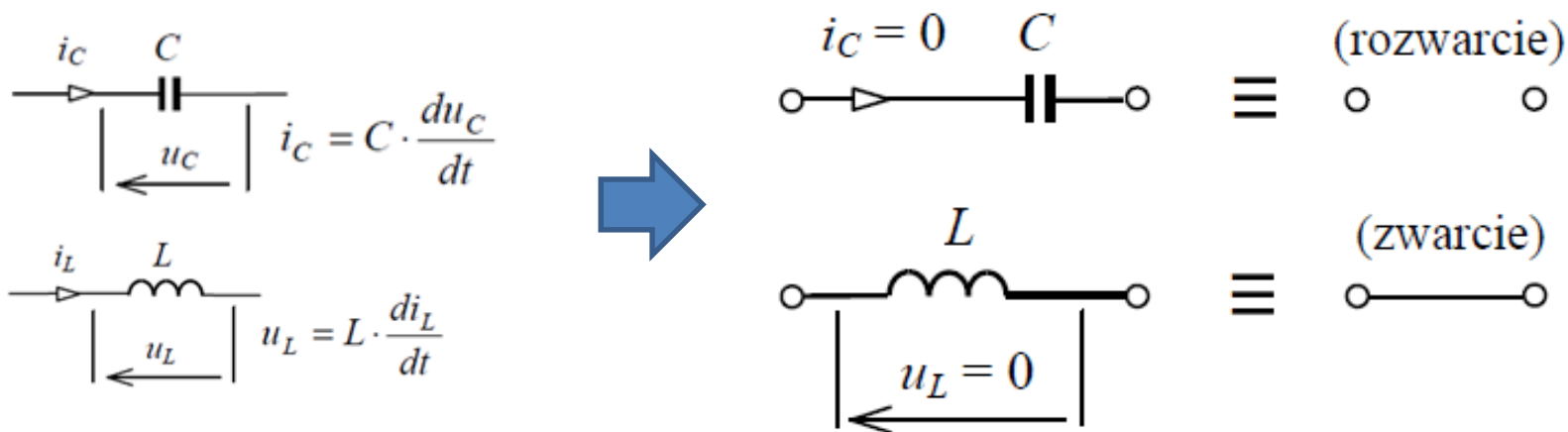
Warto zaznaczyć, że nieformalnie używa się pojęcia obwodu prądu stałego także w szerszym znaczeniu, obejmującym dodatkowo, oprócz stanów ustalonych, stany przejściowe układów zawierających pojemności i indukcyjności, przy wymuszeniach stałoprądowych.

Prądy i napięcia elementów obwodu prądu stałego są zatem stałe, tj. niezmiennie w czasie, co zaznacza się pisząc symbole wielkimi literami:  $U$ ,  $I$ . Wszystkie elementy obwodu prądu stałego znajdują się w stanie stacjonarnym.

Pojemności i indukcyjności, odwzorowujące określone właściwości struktury przestrzennej badanego obiektu, nie mają wpływu na stan pracy obwodu prądu stałego. Energia zakumulowana w elementach układu jest wynikiem procesów przejściowych, poprzedzających osiągnięcie stanu ustalonego.

W stanie ustalonym nie płyną prądy ładowania pojemności i nie występują napięcia na indukcyjnościach. Nie ma więc potrzeby umieszczania tych elementów na schematach obwodów prądu stałego (pojemność stanowi tu przerwę, a indukcyjność – zwarcie końców).

Jedynymi elementami pasywnymi, występującymi na schematach tych obwodów, są rezystancje.



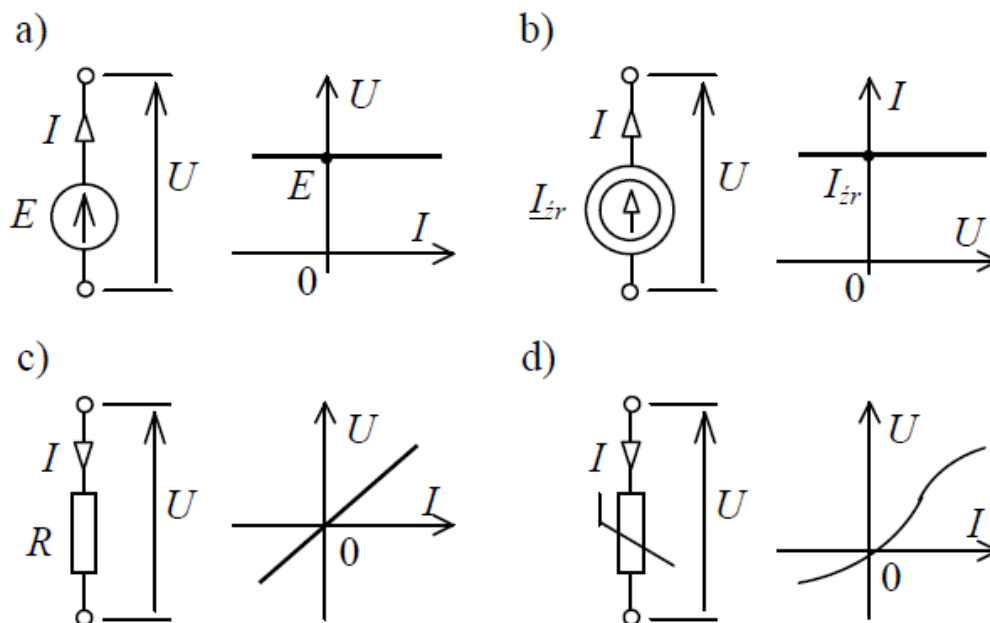
Charakteryzowane obwody prądu stałego będą się składać z gałęzi, zbudowanych z rezystancji (konduktancji) oraz idealnych źródeł prądu stałego – napięciowych (o stałej wartości napięcia) i prądowych (o stałej wartości prądu).

Zależność  $U$  od  $I$  nazywa się charakterystyka statyczna prądowo-napięciowa  $U(I)$  elementu, a zależność  $I$  od  $U$  – jego charakterystyka statyczna napięciowo-prądowa  $I(U)$ .

Przydomek „statyczna” oznacza, że chodzi o wielkości stałe w czasie. Analogiczne zależności dla wielkości zmiennych w czasie ( $u, i$  – pisane małymi literami):  $u(i)$  lub  $i(u)$ , dotyczące tych samych obiektów fizycznych, mogą się znacznie różnić od charakterystyk statycznych.

Symbole oraz charakterystyki statyczne prądowo-napięciowe:

- a). idealnego źródła napięciowego
- b). idealnego źródła prądowego
- c). rezystora liniowego
- d). rezystora nieliniowego

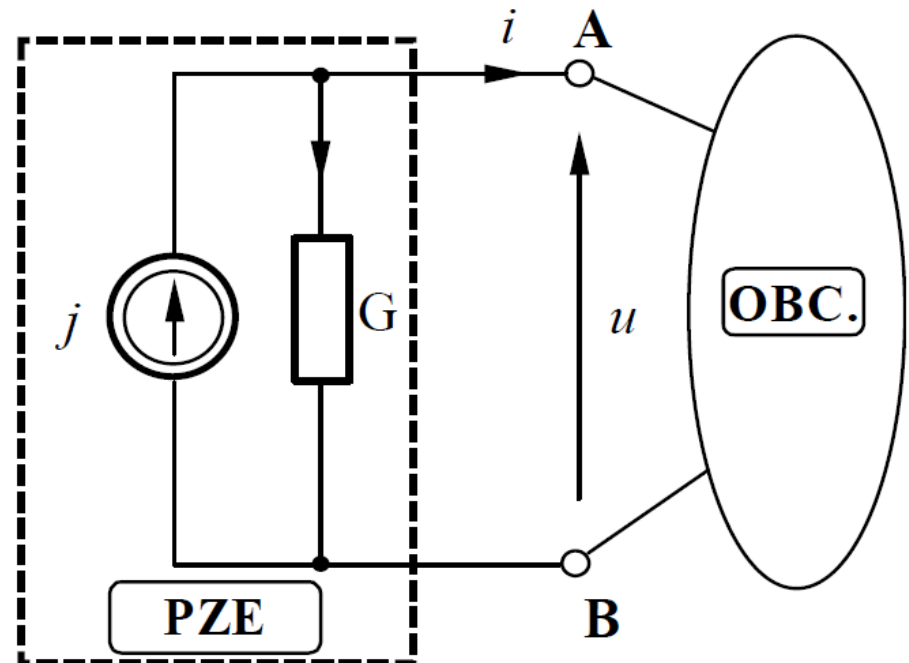
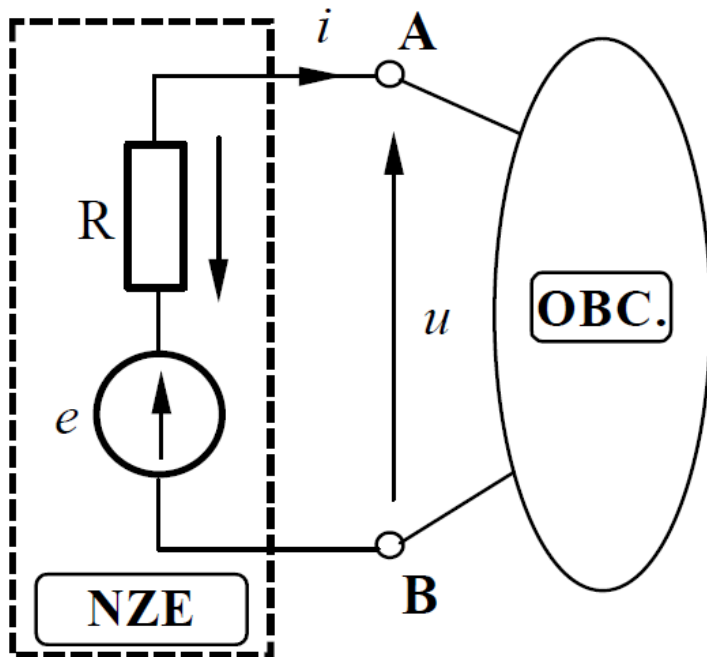


Napięcie i prąd są tu strzałkowane w normalny sposób:

- przy źródłach – zgodnie (generatorowo),
- przy rezystorach – przeciwnie (odbiornikowo).

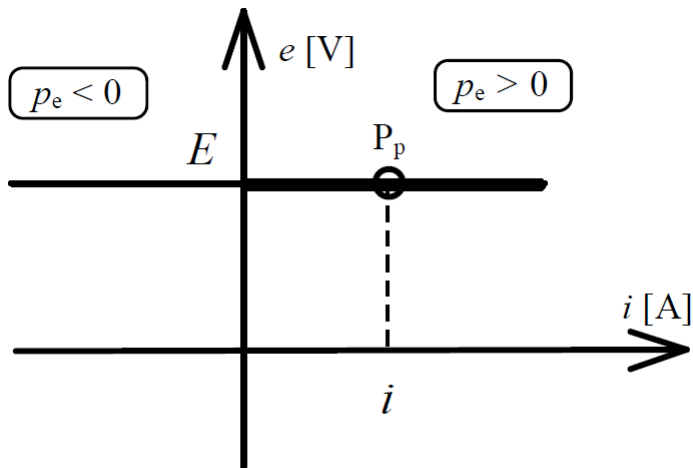
Każde rzeczywiste źródło sygnału stałoprądowego można, w celu analizy, zastąpić prostym układem zastępczym.

Układ taki składa się z dwu elementów; idealnego źródła napięcia NZE lub prądu PZE oraz elementu reprezentującego rezystancję (oporność) wewnętrzną źródła rzeczywistego.

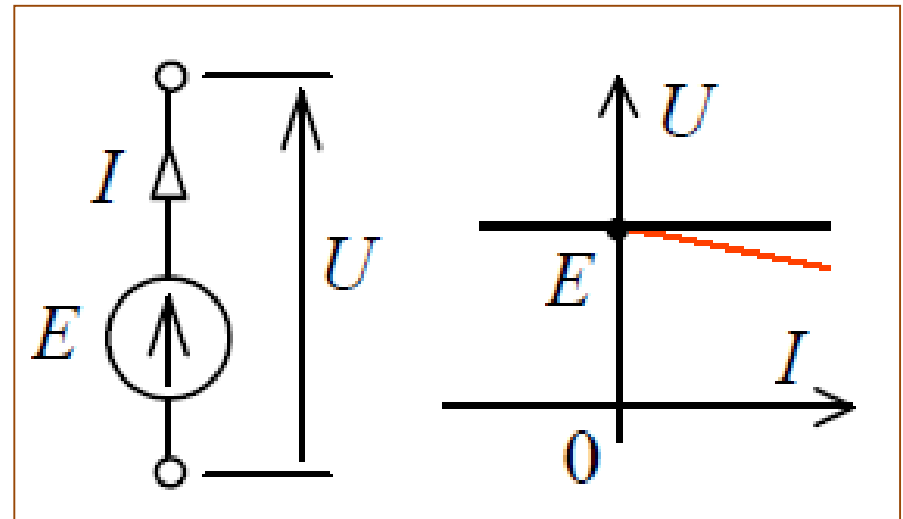


# IDEALNE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA

# IDEALNE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA ( $R_W = 0$ )



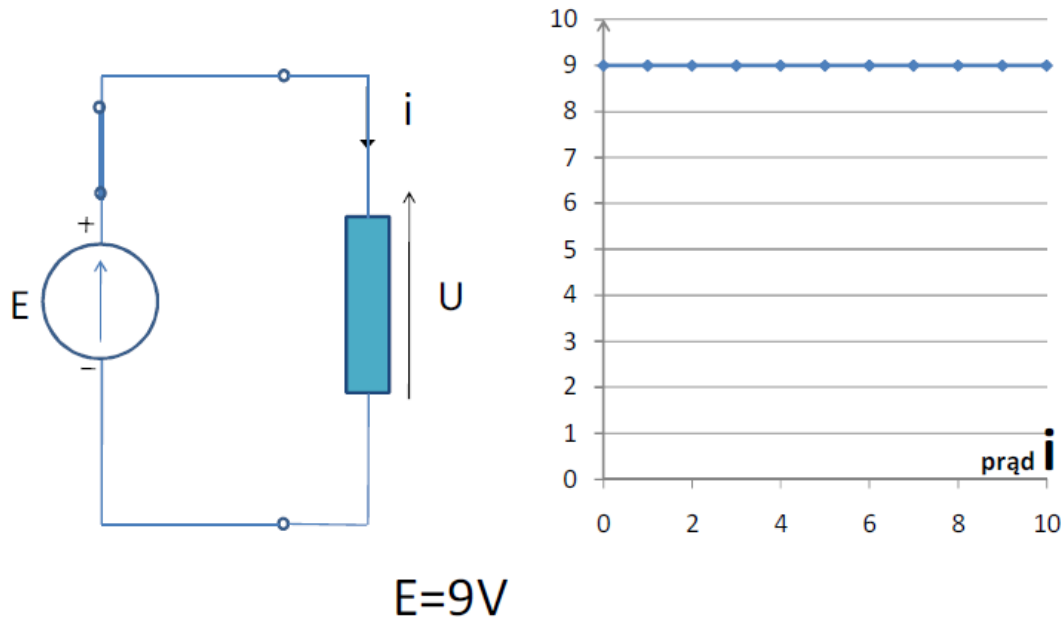
Charakterystyka źródła napięcia o stałej wartości:  $e(t) = E = \text{const}$



**Idealne źródło napięciowe** wytwarza na swych zaciskach napięcie  $e$  (SEM - siłę elektromotoryczną), którego wartość nie zależy od obciążenia, czyli wartości dostarczanego przez to źródło prądu. Napięcie na zaciskach idealnego źródła napięcia nie zależy od obciążenia, tzn. od pobieranego prądu. Stanowi ono w obwodzie takie miejsce, w którym następuje skok napięcia o  $E$  przy rezystancji wewnętrznej równej zero. Strzałka napięcia źródłowego  $e$  wskazuje zacisk o wyższym potencjale, strzałka napięcia  $u$  na odbiorniku jest przeciwna do strzałki prądu  $i$ .

# IDEALNE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA

( $R_W = 0$ )



Idealne źródło napięcia (bez rezystancji wewnętrznej)

**Moc chwilowa idealnego źródła napięcia**

$$p_e(t) = u(t) \cdot i(t) = e(t) \cdot i_e(t) [W]$$

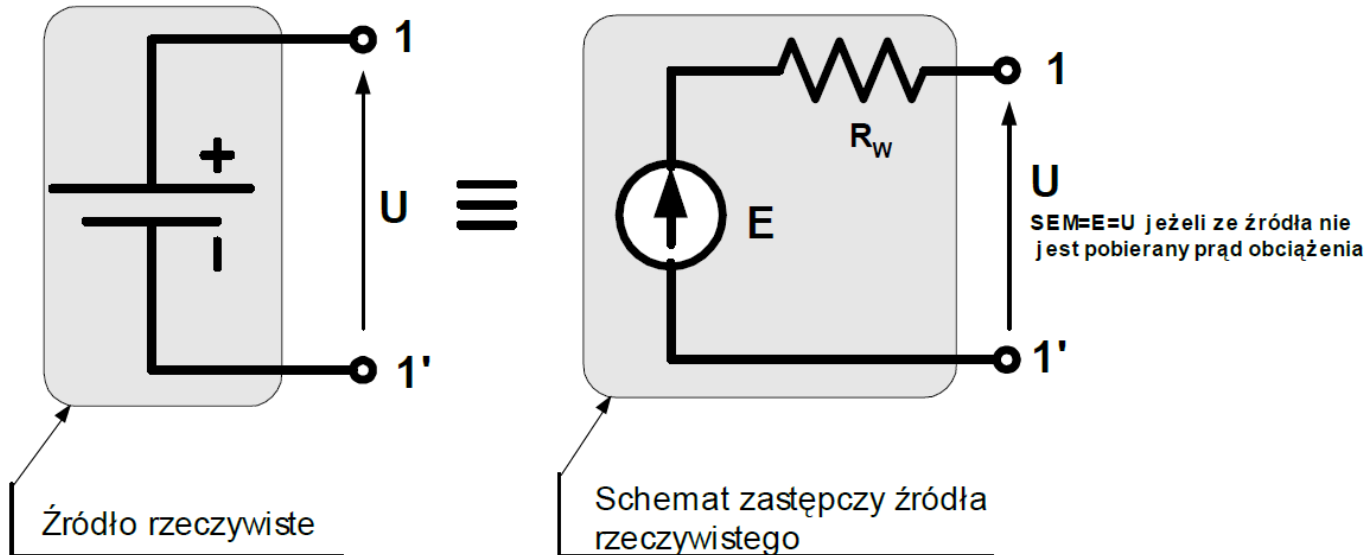
$p_e(t) > 0$  – źródło oddaje energię

$p_e(t) < 0$  – źródło pobiera energię

# **RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA**

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA

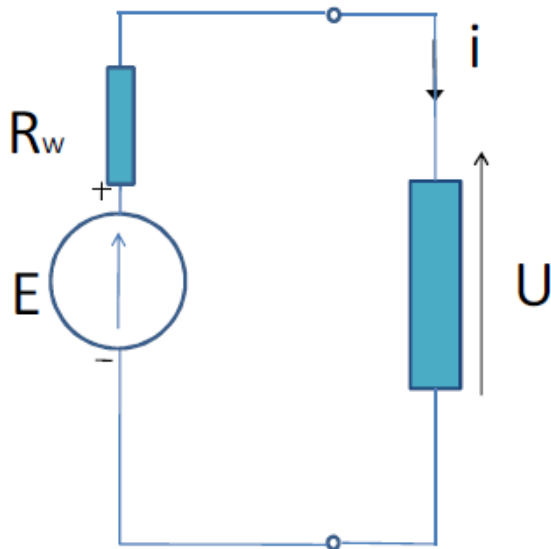
( $R_W > 0$ )



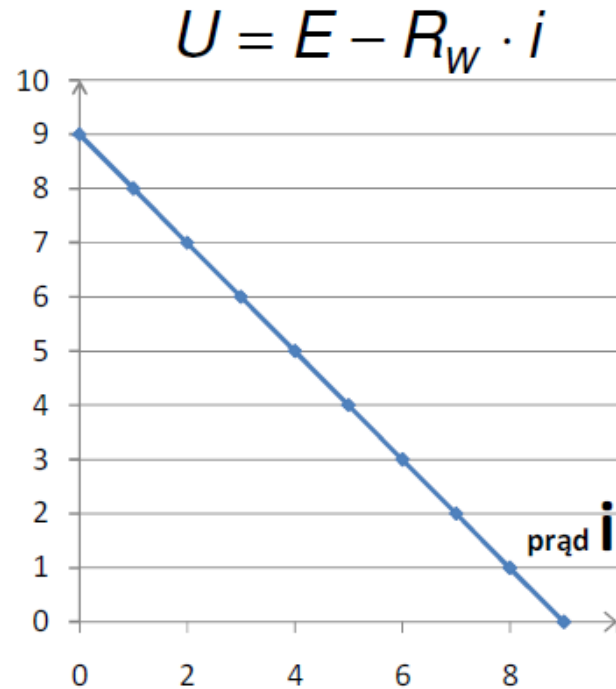
Rezystancja wewnętrzna źródeł rzeczywistych wpływa w znaczący sposób na właściwości tych źródeł. Rzeczywiste źródło napięcia jest tym lepsze im mniejsza jest jego rezystancja wewnętrzna  $R_W$ . Rezystancja ta ujawnia swoje oddziaływanie w przypadku, kiedy ze źródła napięcia pobierany jest prąd.

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA

( $R_W > 0$ )



$E=9V, R_W=1\Omega$



$i_{\max} = E/R_W$

Prąd  $I$  pobierany przez obciążenie dołączone do zacisków wyjściowych źródła powoduje, że napięcie  $U$  występujące na zaciskach tego źródła, jest mniejsze od napięcia  $E$  występującego na tych zaciskach w sytuacji kiedy ze źródła nie jest pobierany prąd (to jest  $I = 0$ ).

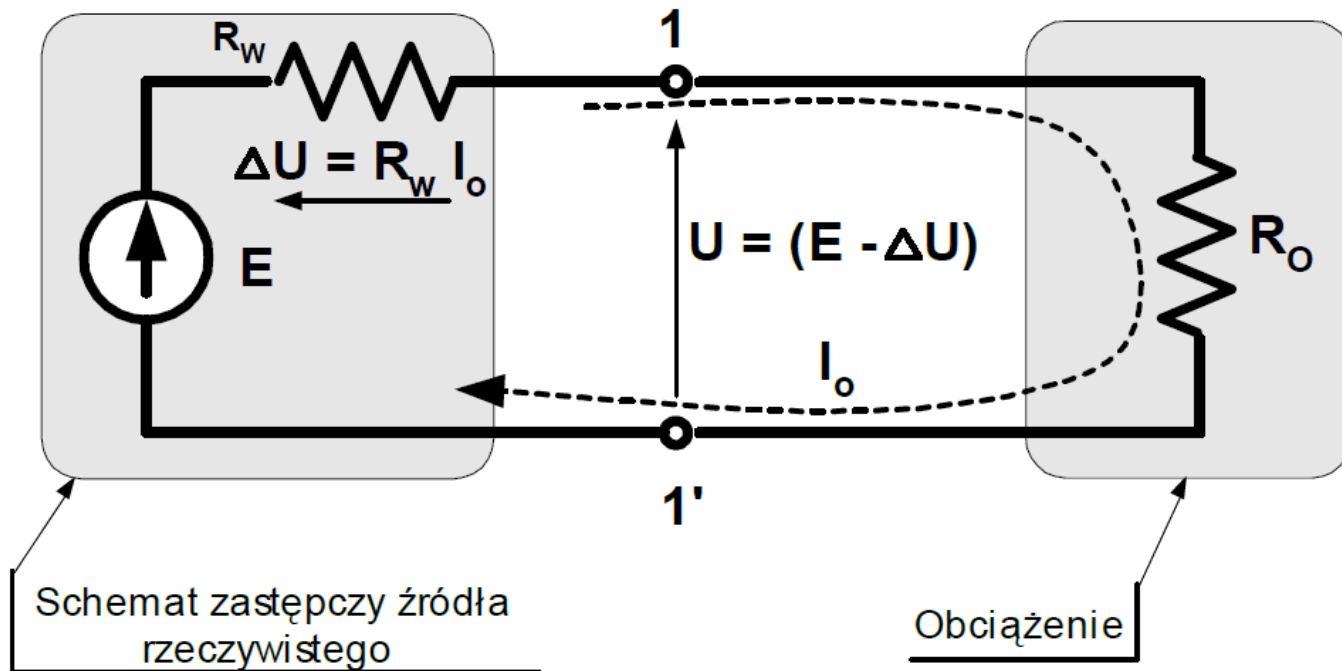
## RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIA

$$(R_w > 0)$$

$$U = 0 \Rightarrow J = J_{\text{ZWARCIA}} = \frac{E}{R_w} \rightarrow \text{zwarcie}$$

$$I = 0 \Rightarrow U = U_0 = E \rightarrow \text{stan jałowy}$$

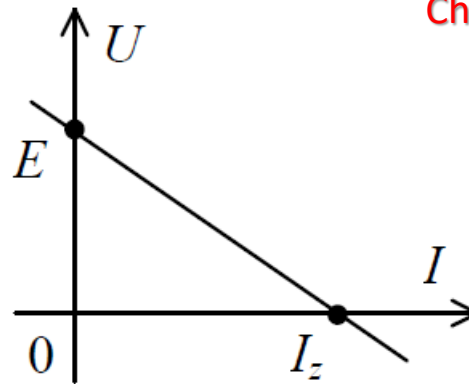
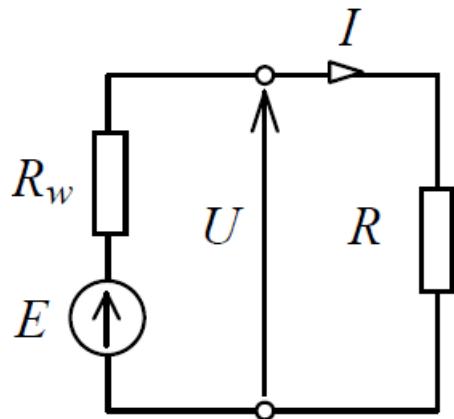
$$\Delta U = I_o \cdot R_w$$



Prąd  $I_o$  pobierany przez obciążenie  $R_o$  dołączone do zacisków wyjściowych źródła 1- 1' powoduje, że napięcie  $U$  występujące na zaciskach tego źródła, jest mniejsze od napięcia  $E$  występującego na tych zaciskach w sytuacji kiedy ze źródła nie jest pobierany prąd (to jest  $I_o = 0$ ).

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIOWE OBCIĄŻONE REZYSTANCJĄ

Schemat i charakterystyka zewnętrzna rzeczywistego stałoprądowego źródła napięciowego, obciążonego rezystancją R.



Charakterystyka przedstawia zależność

$$U = E - R_w \cdot I$$

W stanie jałowym ( $I = 0$ )  
napięcie  $U$  ma wartość

$$U_0 = E$$

Moc wytwarzana w źródle (oddawana przez idealne źródło) przy obciążeniu prądem  $I$  wynosi

$$P_1 = E \cdot I$$

w stanie zwarcia ( $U = 0$ ) prąd  $I$  ma wartość

$$I_z = \frac{E}{R_w}$$

Moc oddawana do obwodu zewnętrznego (pobierana przez odbiornik) oraz sprawność źródła

$$P_2 = U \cdot I = E \cdot I - R_w \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U}{E} = \frac{E - R_w \cdot I}{E} = 1 - \frac{I}{I_z}$$

## RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIOWE OBCIĄŻONE REZYSTANCJĄ

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U}{E} = \frac{E - R_w \cdot I}{E} = 1 - \frac{I}{I_z} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{U}{E} = \frac{R \cdot I}{(R + R_w) \cdot I} = \frac{R}{R + R_w}$$

Stan, w którym z danego źródła pobierana jest największa moc, nazywa się stanem dopasowania odbiornika do źródła. Prąd  $I$  ma wtedy taką wartość, że

$$\frac{dP_2}{dI} = 0 \quad \Rightarrow \quad E - 2R_w \cdot I_{dop} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{dop} = \frac{E}{2R_w}$$

Ponieważ jednak  $I_{dop} = \frac{E}{R_{dop} + R_w}$  więc warunkiem dopasowania odbiornika do źródła jest

stan, w którym z danego źródła napięcia lub prądu jest pobierana możliwie największa moc

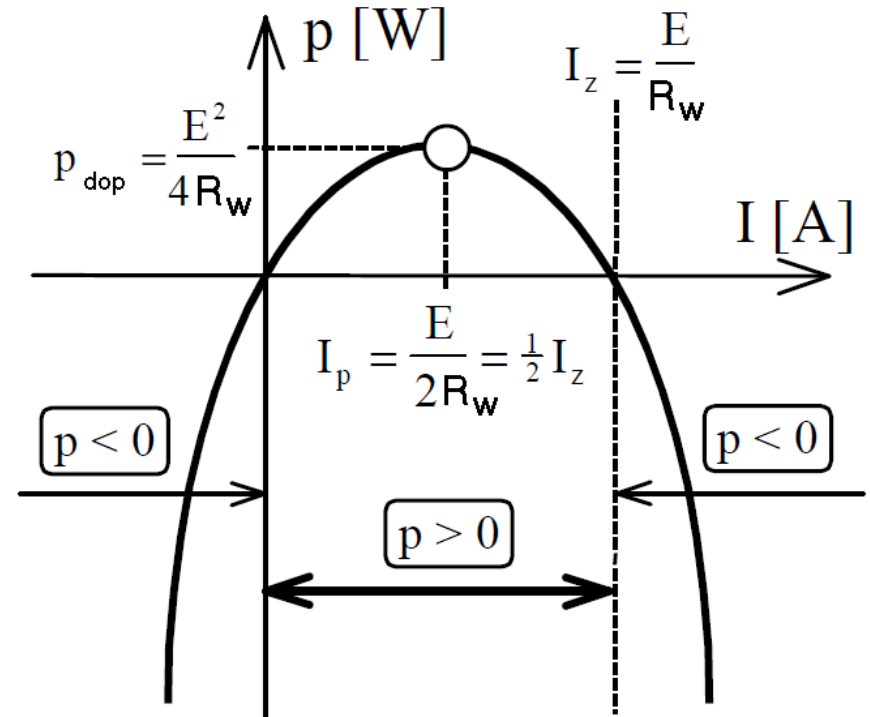
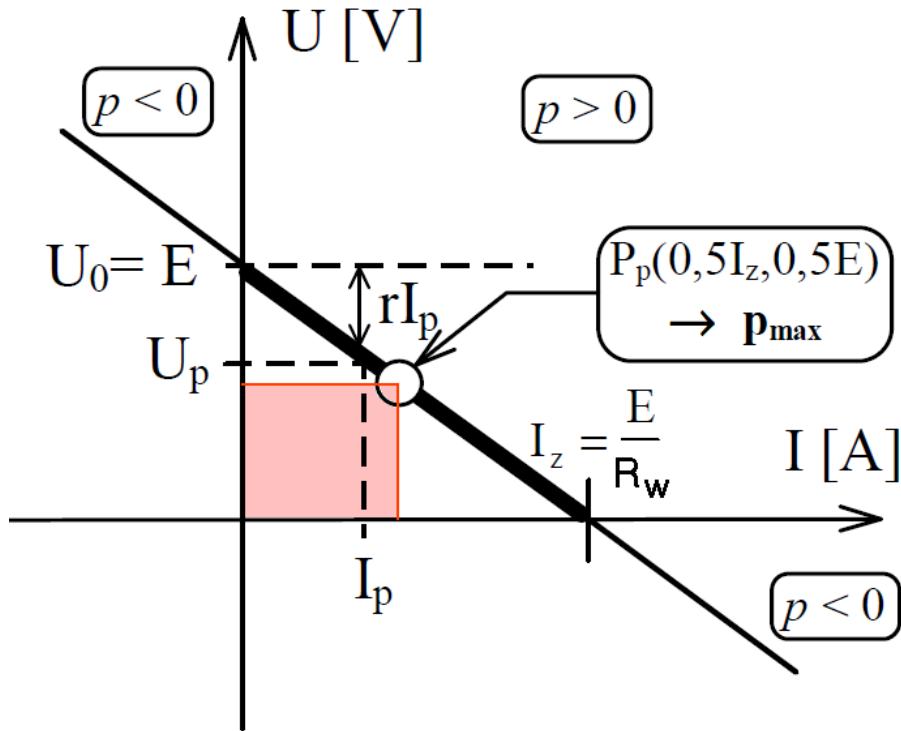
$$\eta_{dop} = 0,5 \quad \leftarrow \quad R_{dop} = R_w \quad \rightarrow \quad P_{2,dop} = R_{dop} \cdot I_{dop}^2 = \frac{E^2}{4R_w}$$

sprawność źródła w stanie dopasowania

moc pobierana przez odbiornik

Moc  $P_{2,dop}$ , jest nazywana mocą dopasowania odbiornika do źródła napięciowego lub mocą dysponowaną źródła napięciowego.

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO NAPIĘCIOWE OBCIĄŻONE REZYSTANCJĄ



$$\eta_{dop} = 0,5 \quad \leftarrow \quad R_{dop} = R_w \quad \rightarrow \quad P_{2.dop} = R_{dop} \cdot I_{dop}^2 = \frac{E^2}{4R_w}$$

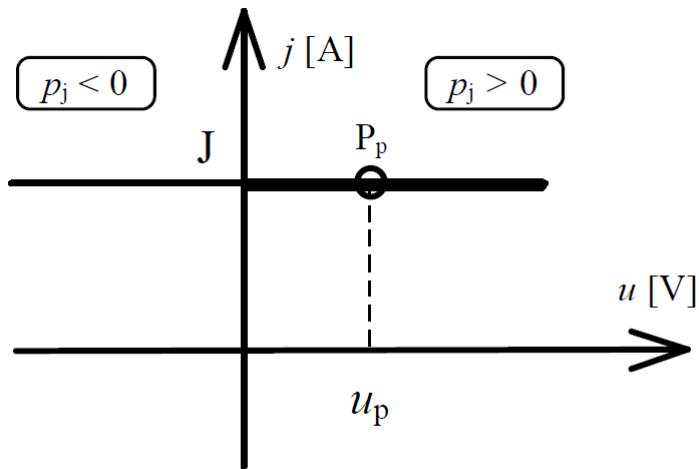
sprawność źródła w stanie dopasowania

moc pobierana przez odbiornik

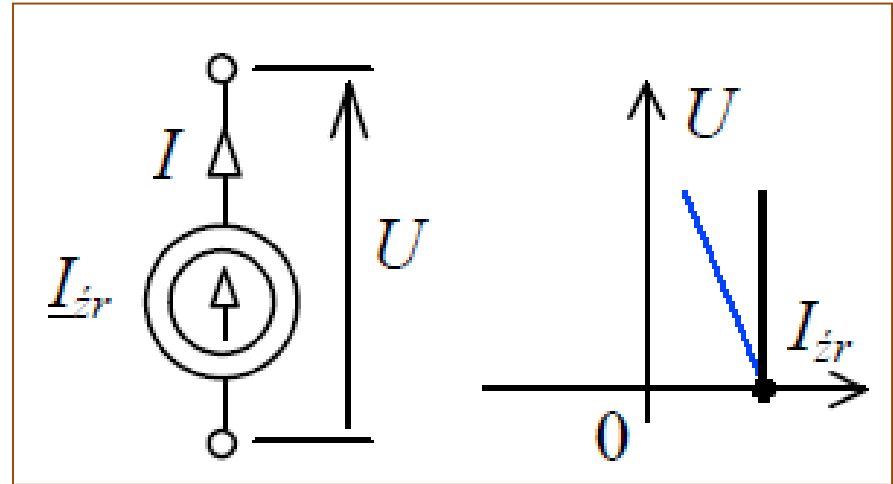
Moc  $P_{2.dop}$ , jest nazywana mocą dopasowania odbiornika do źródła napięciowego lub mocą dysponowaną źródła napięciowego.

# IDEALNE ŹRÓDŁO PRĄDU

# IDEALNE ŹRÓDŁO PRĄDU ( $R_w = \infty$ )

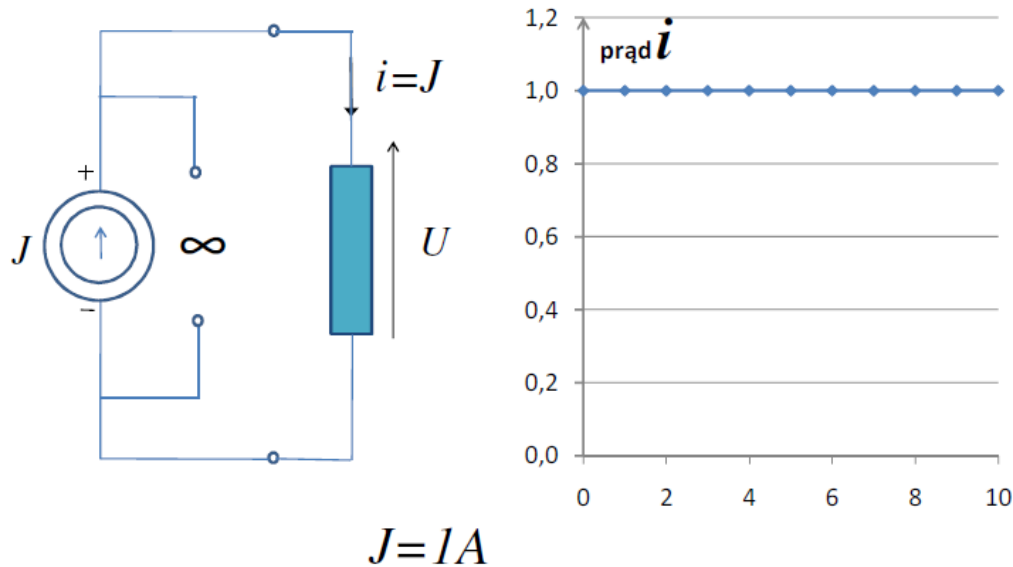


Charakterystyka źródła prądu o stałej wydajności:  $j(t) = J = \text{const}$



**Idealne źródło prądu** wytwarza prąd, którego natężenie jest niezależne od dołączonego obciążenia. Napięcie na zaciskach takiego źródła jest równe zero przy zwarciu i rośnie proporcjonalnie do wzrostu wartości rezystancji obciążenia.

# IDEALNE ŹRÓDŁO PRĄDU ( $R_w = \infty$ )



Idealne źródło napięcia (rezystancja wewnętrzna =  $\infty$ )

## Moc chwilowa idealnego źródła prądu

$$p_j(t) = u(t) \cdot i(t) = u_j(t) \cdot j(t) [W]$$

$p_j(t) > 0$  – źródło oddaje energię

$p_j(t) < 0$  – źródło pobiera energię

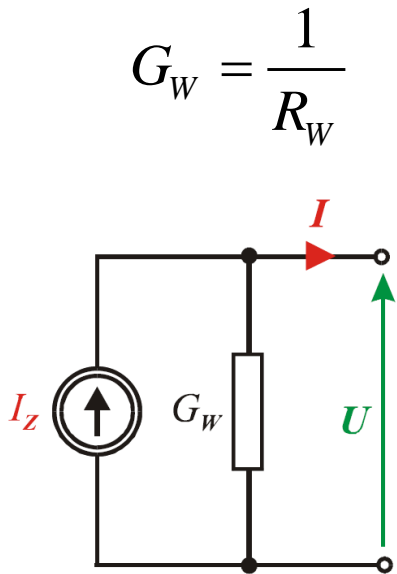
# **RZECZYWISTE ŹRÓDŁO PRĄDU**

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO PRĄDU

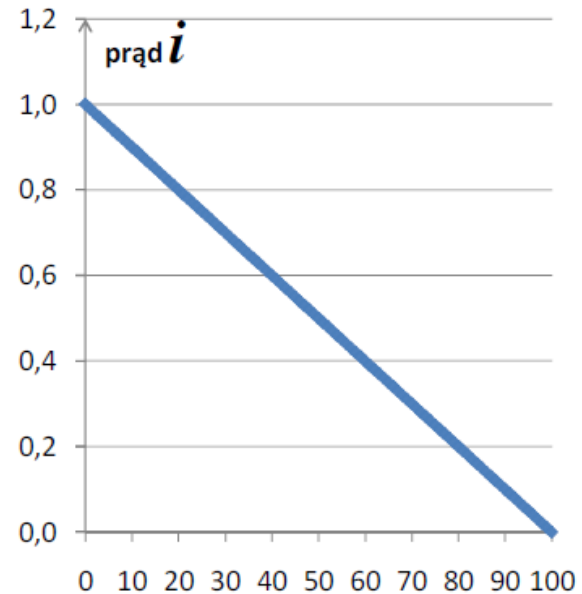
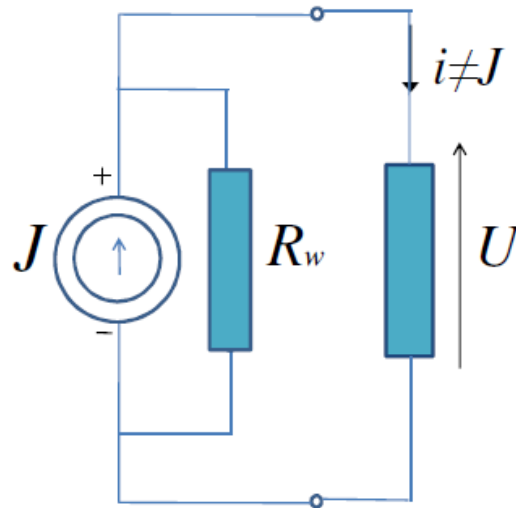
$$(R_w > 0)$$

$$U = 0 \Rightarrow J = J_{\text{ZWARCIA}} \rightarrow \text{zwarcie}$$

$$I = 0 \Rightarrow U = U_0 = \frac{I_z}{G_w} \rightarrow \text{stan jałowy}$$



$$G_w = \frac{1}{R_w}$$



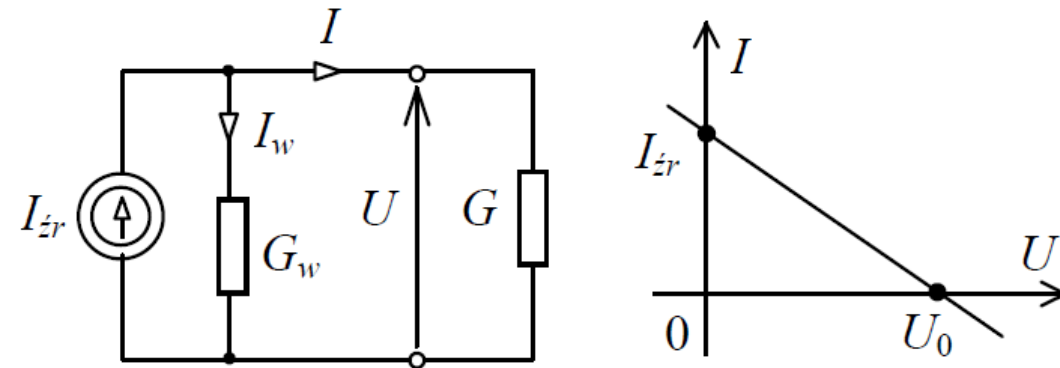
$$J = 1\text{A}, R_w = 100\Omega, \quad i = J - \frac{1}{R_w} \cdot U$$

Źródło prądowe rzeczywiste charakteryzuje się występowaniem zmniejszania wartości prądu przy wzroście napięcia na zaciskach źródła.

Schemat zastępczy źródła prądowego rzeczywistego składa się z równoległego połączenia źródła prądowego idealnego i konduktancji wewnętrznej.

# RZECZYWISTE ŹRÓDŁO PRĄDU OBCIĄŻONE KONDUKTANCJĄ

Schemat i charakterystyka zewnętrzna rzeczywistego stałoprądowego źródła prądowego, obciążonego konduktancją  $G$ .



Charakterystyka przedstawia zależność

$$I = I_{\dot{z}r} - G_w \cdot U$$

W stanie jałowym ( $I = 0$ )  
napięcie  $U$  ma wartość

$$U_0 = \frac{I_{\dot{z}r}}{G_w}$$

Moc wytwarzana w źródle (oddawana przez  
idealne źródło) przy napięciu  $U$  wynosi

$$P_1 = U \cdot I_{\dot{z}r}$$

w stanie zwarcia ( $U = 0$ ) prąd  $I$  ma wartość

$$I_z = I_{\dot{z}r}$$

Moc oddawana do obwodu zewnętrznego (pobierana przez odbiornik)  
oraz sprawność źródła

$$P_2 = U \cdot I = U \cdot I_{\dot{z}r} - G_w \cdot U^2 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I}{I_{\dot{z}r}} = \frac{I_{\dot{z}r} - G_w \cdot U}{I_{\dot{z}r}} = 1 - \frac{U}{U_0}$$

## RZECZYWISTE ŹRÓDŁO PRĄDU OBCIĄŻONE KONDUKTANCJĄ

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I}{I_{\dot{z}r}} = \frac{I_{\dot{z}r} - G_w \cdot U}{I_{\dot{z}r}} = 1 - \frac{U}{U_0} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{I}{I_{\dot{z}r}} = \frac{G \cdot U}{(G + G_w) \cdot U} = \frac{G}{G + G_w}$$

Stan, w którym z danego źródła pobierana jest największa moc, nazywa się stanem dopasowania odbiornika do źródła. Napięcie  $U$  ma wtedy taką wartość, że

$$\frac{dP_2}{dU} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{\dot{z}r} - 2G_w \cdot U_{dop} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{dop} = \frac{I_{\dot{z}r}}{2G_w}$$

Ponieważ jednak,  $U_{dop} = \frac{I_{\dot{z}r}}{G_{dop} + G_w}$  więc warunkiem dopasowania odbiornika do źródła jest

stan, w którym z danego źródła napięcia lub prądu jest pobierana możliwie największa moc

$$\eta_{dop} = 0,5 \quad \leftarrow \quad G_{dop} = G_w \quad \rightarrow \quad P_{2.dop} = G_{dop} \cdot U_{dop}^2 = \frac{I_{\dot{z}r}^2}{4G_w}$$

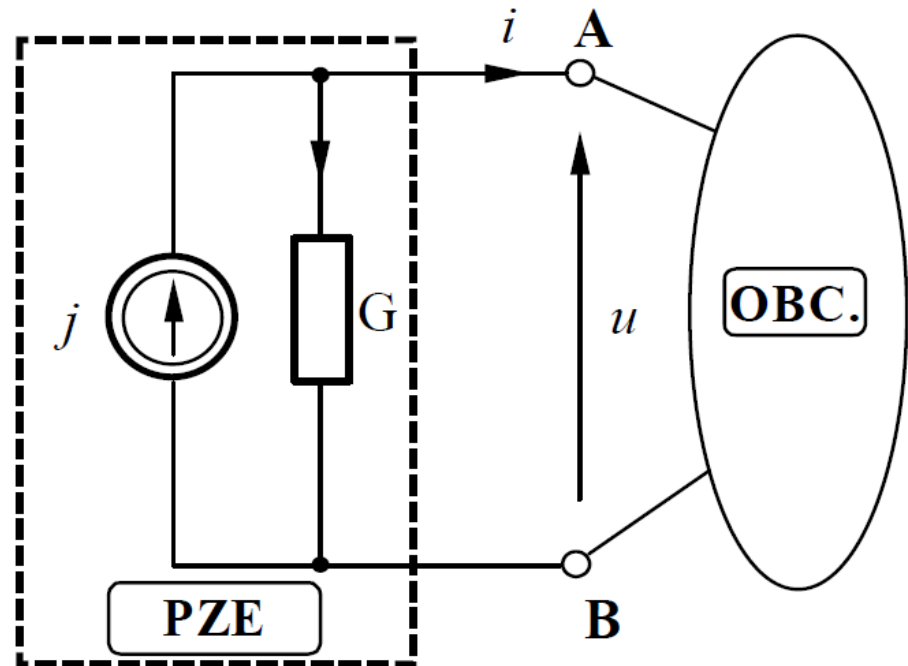
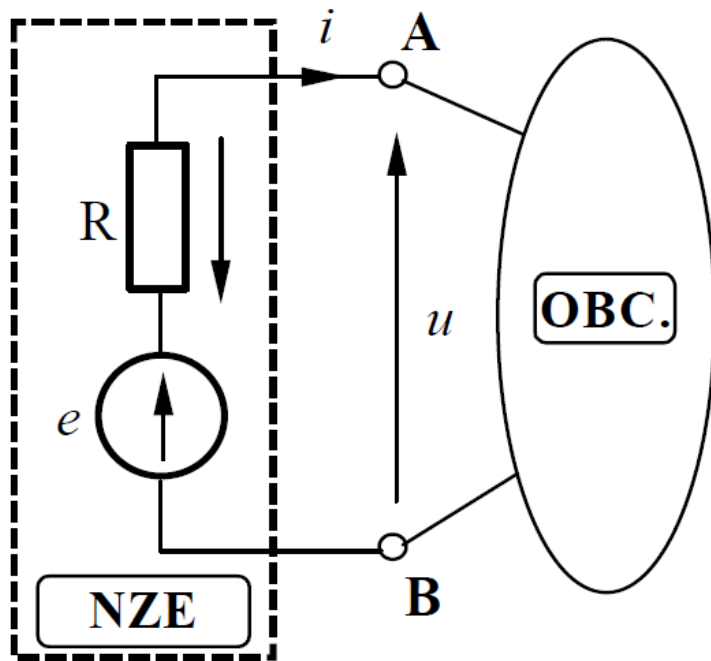
sprawność źródła w stanie dopasowania

moc pobierana przez odbiornik

Moc  $P_{2.dop}$ , jest nazywana mocą dopasowania odbiornika do źródła prądowego lub mocą dysponowaną źródła prądowego.

**RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA  
RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ  
NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH**

## RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH



Równoważność źródeł dotyczy ich wielkości zaciskowych, tj. identyczności prądów oraz napięć na zaciskach obu źródeł

Źródła napięciowe przy  $I < 0$  i prądowe przy  $U < 0$ , stają się odbiornikami aktywnymi

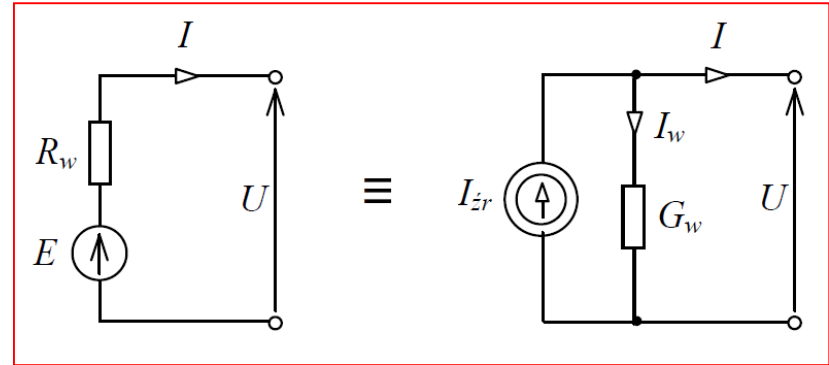
# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

Źródło napięciowe

$$U = E - R_w \cdot I$$

Źródło prądowe

$$I_w = I_{\dot{z}r} - I$$



$$G_w \cdot U = I_{\dot{z}r} - I$$

$$U = \frac{I_{\dot{z}r}}{G_w} - \frac{1}{G_w} \cdot I \quad \text{Otrzymuje się tożsamość} \quad E - R_w \cdot I \equiv \frac{I_{\dot{z}r}}{G_w} - \frac{1}{G_w} \cdot I$$

z niej warunki równoważności układów

$$R_w = \frac{1}{G_w}$$

$$E = \frac{I_{\dot{z}r}}{G_w} = R_w \cdot I_{\dot{z}r}$$

$$G_w = \frac{1}{R_w}$$

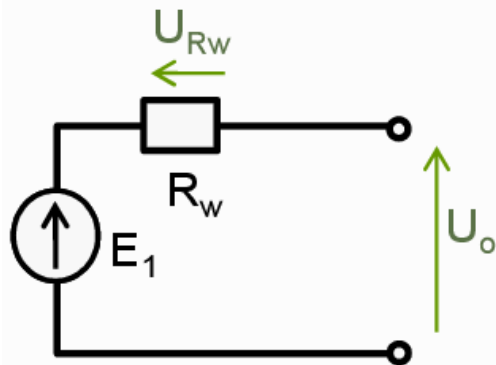
$$I_{\dot{z}r} = G_w \cdot E = \frac{E}{R_w}$$



Charakterystyki  
zewnętrzne  
źródeł  
równoważnych  
są identyczne

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

STAN JAŁOWY

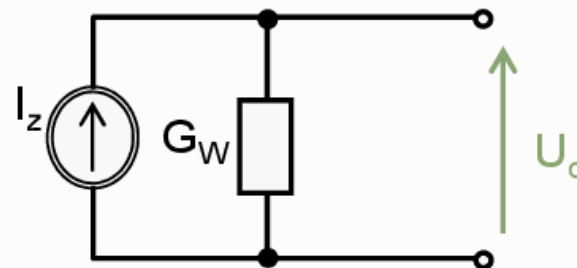


$$U_o = E_1$$

$$R \cdot G = 1$$

$$I_{\dot{Z}R} = G \cdot U$$

$$E = R \cdot I_{\dot{Z}R}$$



$$U_o = \frac{I_z}{G_w}$$

$$U_o = E - R_w \cdot I$$

$$I = I_z - G_w \cdot U$$

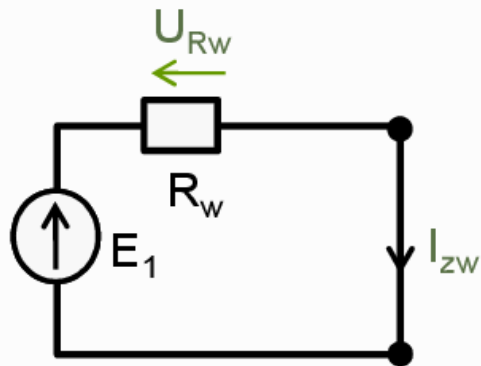
$$E_1 = \frac{I_z}{G_w}$$

Zamiany rzeczywistych źródeł – napięciowego na prądowe albo prądowego na napięciowe, to zabiegi czysto obliczeniowe, dotyczące równoważności wielkości zaciskowych (napięć oraz prądów na zaciskach).

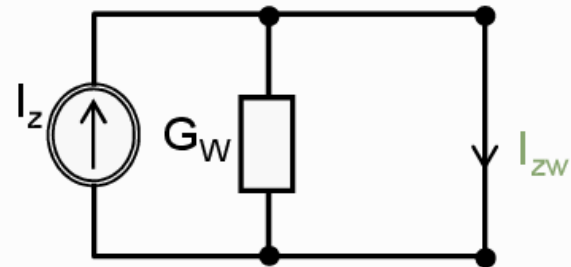
$U_o$  – napięcie stanu jałowego

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

## STAN ZWARCIA



$$I_{zw} = \frac{E_1}{R_w}$$

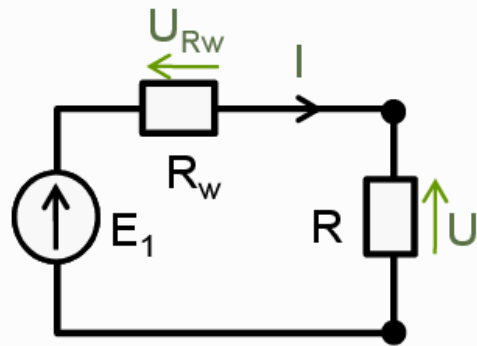


$$I_{zw} = I_z$$

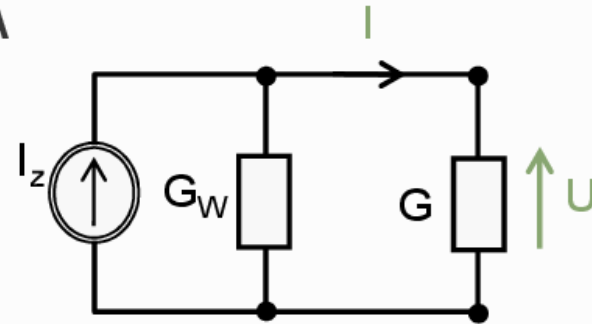
$$I_z = \frac{E_1}{R_w}$$

$I_{zw}$  – prąd zwarcia

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH



STAN OBCIĄŻENIA



$$I = \frac{E_1}{R_w + R}$$

$$U = R \cdot I = R \cdot \frac{E_1}{R_w + R}$$

$$I_z = \frac{E}{R_w}$$

$$G_w = \frac{1}{R_w}$$

$$U = \frac{I_z}{G_w + G}$$

$$I = G \cdot U = G \cdot \frac{I_z}{G_w + G}$$

$I$  – prąd obciążenia,  $U$  – napięcie na obciążeniu

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

Jeżeli  $R_w \ll R$ , to:

$$U = \frac{R \cdot E_1}{R_w + R} \cong E_1$$

Wówczas rzeczywiste źródło napięcia  
można zastąpić w przybliżeniu źródłem idealnym.

Jeżeli  $G_w \ll G$ , to:

$$I = \frac{G \cdot I_z}{G_w + G} \cong I_z$$

Wówczas rzeczywiste źródło prądu  
można zastąpić w przybliżeniu źródłem idealnym.

## RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

Nie mogą zachodzić jednocześnie warunki

$$R_w \ll R \quad \text{i} \quad G_w \ll G$$

dlatego **NIE MA**  
**równoważności idealnych źródeł napięcia i prądu**



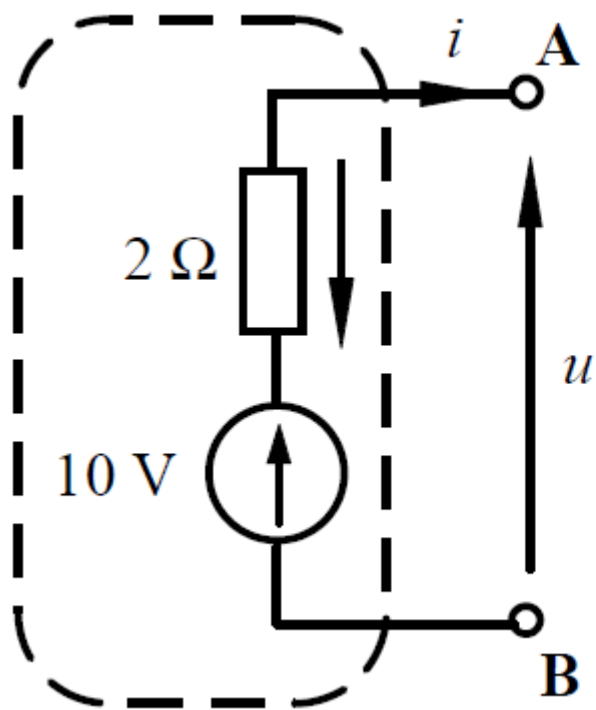
$$G_w = \frac{1}{R_w}$$

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

$$R \cdot G = 1$$

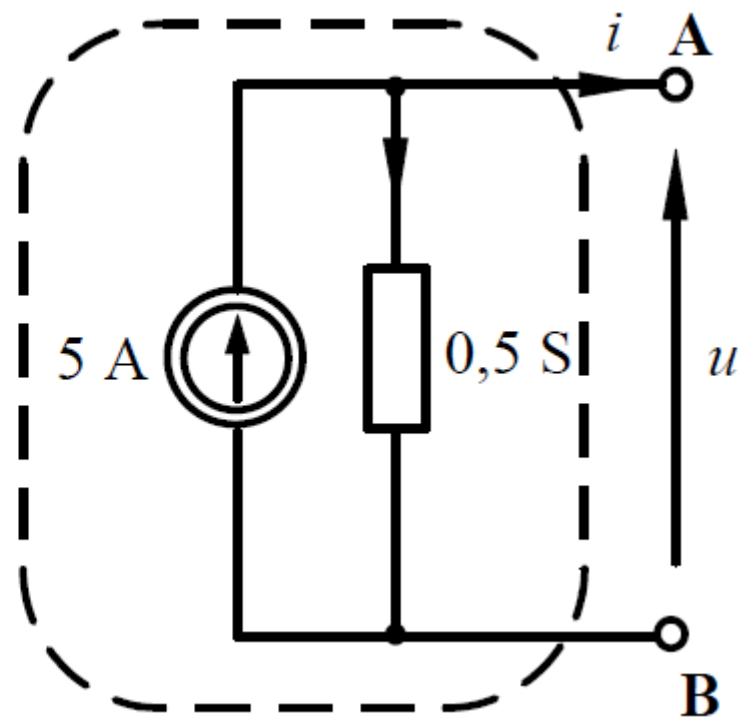
$$I_{\dot{z}R} = G \cdot U$$

$$E = R \cdot I_{\dot{z}R}$$



$$U^0 = 10 \text{ V}, I_z = 5 \text{ A}$$

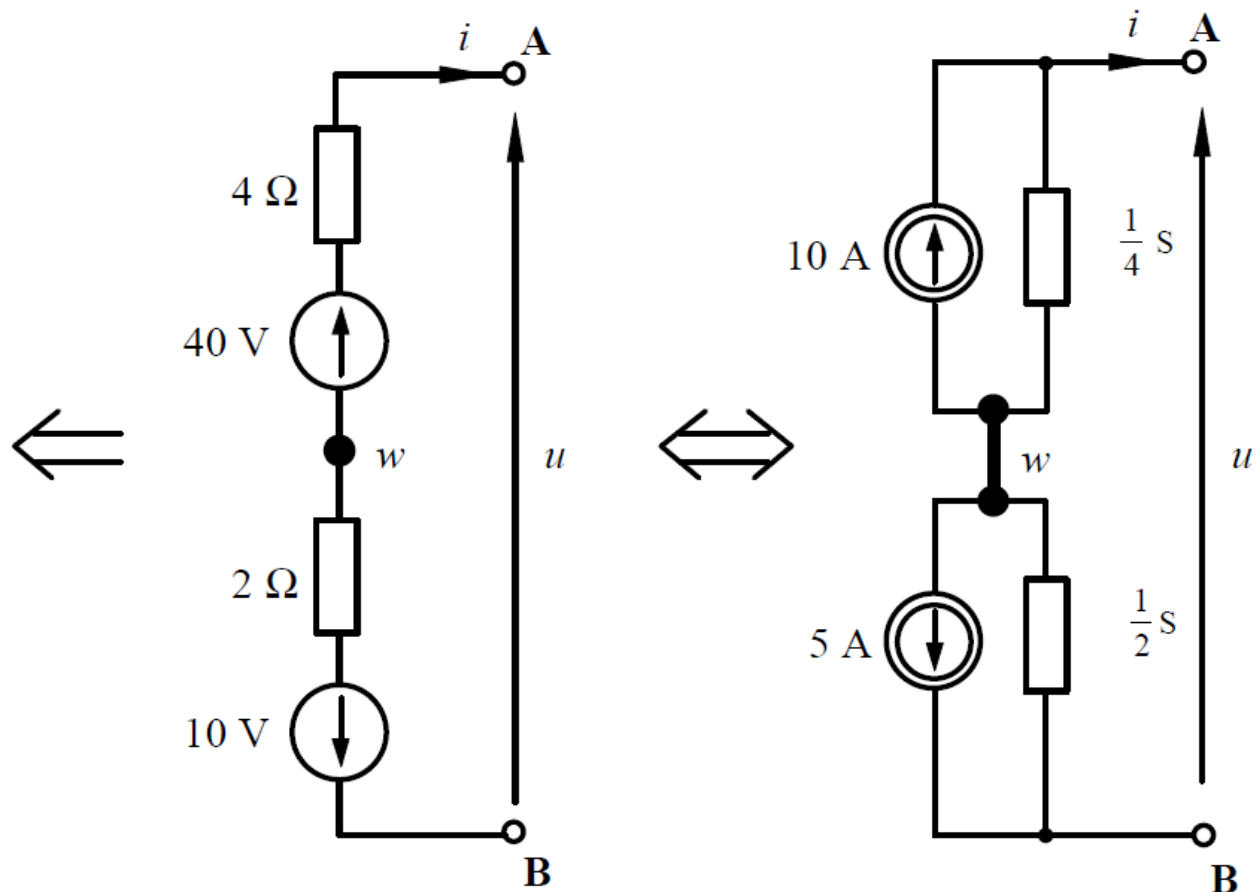
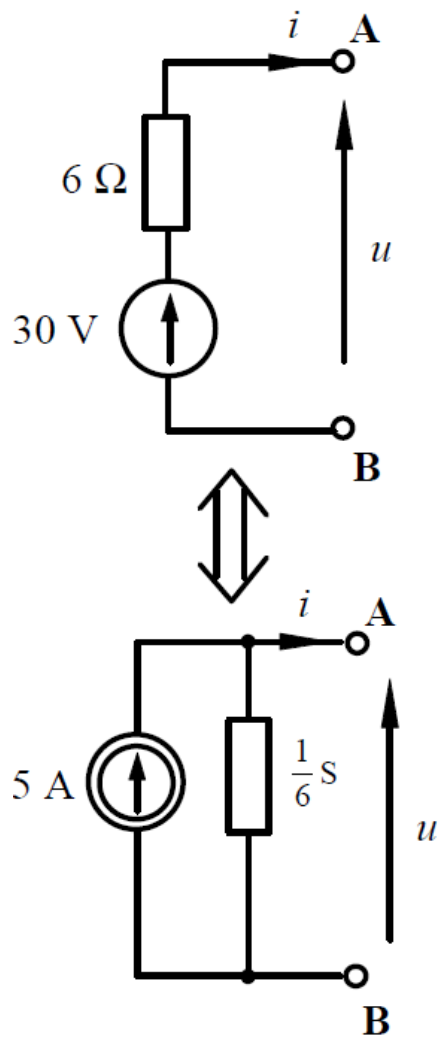
$$\underline{u = 10 - 2i}$$



$$U^0 = 10 \text{ V}, I_z = 5 \text{ A}$$

$$\underline{i = 5 - 0,5u}$$

# RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH



## RÓWNOWAŻNOŚĆ ZACISKOWA RÓWNOWAŻNYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH I PRĄDOWYCH

Trzeba zaznaczyć, że na ogół źródła równoważne – ze względu na wielkości zaciskowe – nie są równoważne ze względu na straty mocy wewnątrz źródeł.

W rzeczywistym źródle napięciowym straty te są równe

$$\Delta P_U = R_w \cdot I^2$$

W rzeczywistym źródle prądowym straty te są równe

$$\Delta P_I = G_w \cdot U^2 = \frac{R^2 \cdot I^2}{R_w}$$

Stąd ich stosunek

$$\frac{\Delta P_U}{\Delta P_I} = \left( \frac{R_w}{R} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = R_w$$

Równoważność źródeł ze względu na straty mocy zachodzi tylko wtedy, gdy  $R = R_w$ , czyli w stanie dopasowania odbiornika do źródła

# **ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDU STAŁEGO**

## ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDU STAŁEGO

Układy różnych źródeł można zastępować – ze względu na wielkości zaciskowe – jednym źródłem odpowiedniego typu → układy szeregowych i równoległych połączeń źródeł tych samych rodzajów.

Warunkiem równoważności idealnych źródeł jest równość, odpowiednio, napięcia bądź prądu źródłowego.

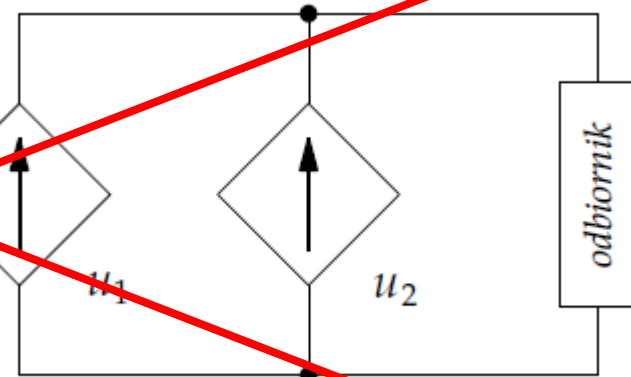
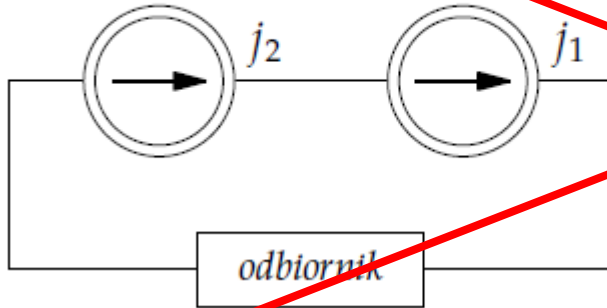
Warunkiem równoważności rzeczywistych źródeł jest równość dwóch z trzech wielkości:

- napięcia w stanie jałowym  $U_0$ ,
- prądu zwarcia  $I_z$
- rezystancji  $R_w$  (konduktancji  $G_w$ ) wewnętrznej,

będącej ilorazem tych wielkości  $R_w = U_0 / I_z$  ( $G_w = I_z / U_0$ ).

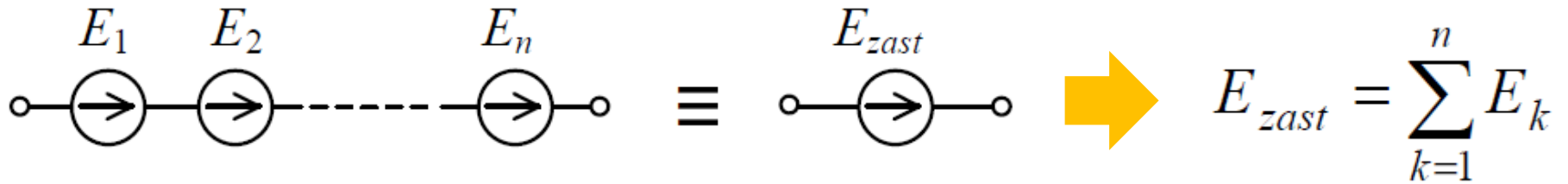
## ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDU STAŁEGO

Połączenia wywołujące sprzeczność definicyjną są **ZAKAZANE**.  
Zakaz ten dotyczy łączenia równoległego idealnych źródeł napięciowych o różnych napięciach źródłowych oraz łączenia szeregowego idealnych źródeł prądowych o różnych prądach źródłowych.

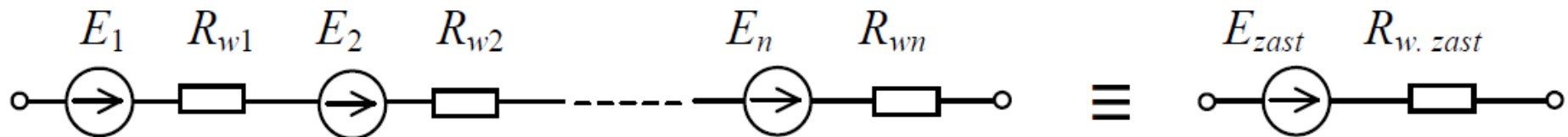


# ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ NAPIĘCIOWYCH PRĄDU STAŁEGO

## Szeregowe połączenie idealnych źródeł napięciowych



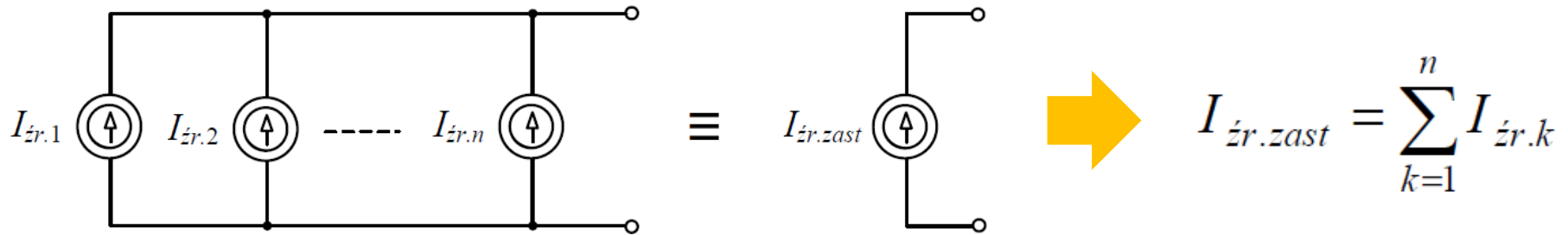
## Szeregowe połączenie rzeczywistych źródeł napięciowych



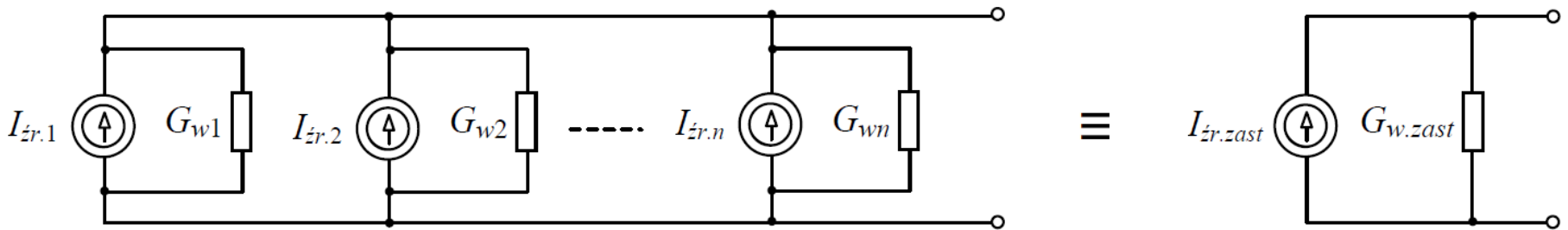
$$E_{zast} = \sum_{k=1}^n E_k, \quad R_{w.zast} = \sum_{k=1}^n R_{wk}$$

# ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDOWYCH PRĄDU STAŁEGO

## Równoległe połączenie idealnych źródeł prądowych



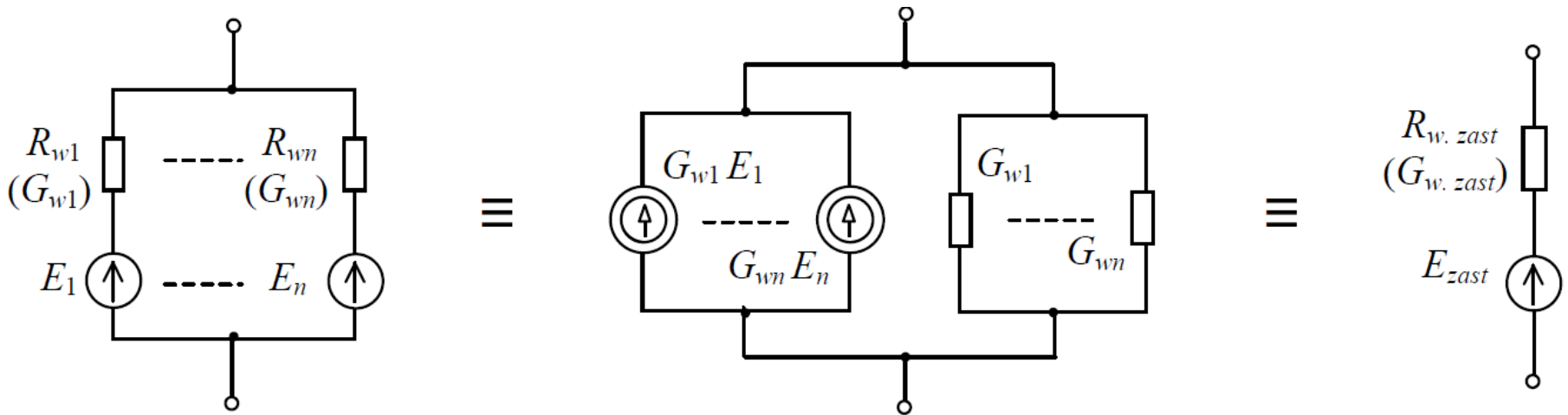
## Równoległe połączenie rzeczywistych źródeł prądowych



$$I_{\dot{z}r.zast} = \sum_{k=1}^n I_{\dot{z}r.k} \quad , \quad G_{w.zast} = \sum_{k=1}^n G_{wk}$$

# ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDU STAŁEGO

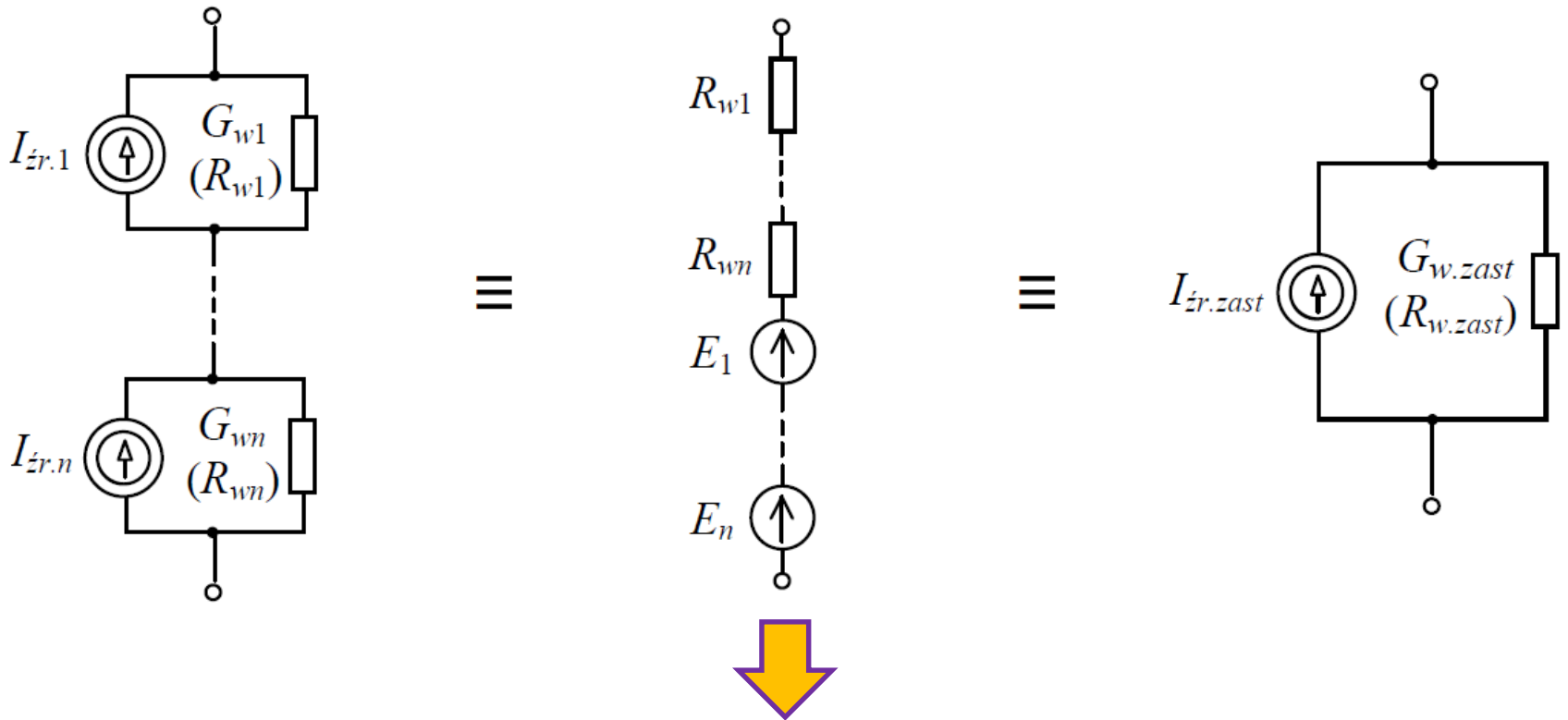
Równoległe połączenie rzeczywistych źródeł napięciowych



$$E_{zast} = \frac{I_{\dot{z}r.zast}}{G_{w.zast}} = \frac{\sum_{k=1}^n G_{wk} \cdot E_k}{\sum_{k=1}^n G_{wk}}, \quad R_{w.zast} = \frac{1}{G_{w.zast}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n G_{wk}}$$

# ŁĄCZENIE ŹRÓDEŁ PRĄDU STAŁEGO

Równoległe połączenie rzeczywistych źródeł prądowych

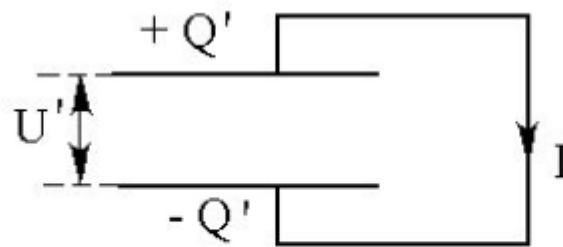
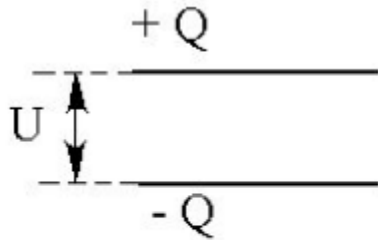


$$I_{\dot{z}r.zast} = \frac{E_{zast}}{R_{w.zast}} = \frac{\sum_{k=1}^n R_{wk} \cdot I_{\dot{z}r.k}}{\sum_{k=1}^n R_{wk}},$$

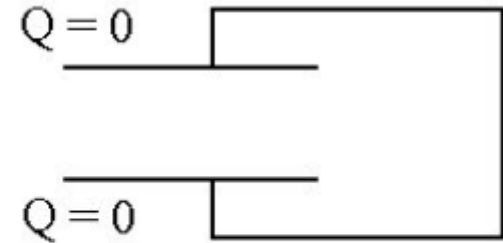
$$G_{w.zast} = \frac{1}{R_{w.zast}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n R_{wk}}$$

# **SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA**

## SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA



$$U' < U, Q' < Q$$



$$U = 0$$

Jak wiadomo, w stanie ustalonym wszystkie punkty przewodnika mają ten sam potencjał a natężenie pola elektrycznego wewnątrz niego jest równe zero. Jeżeli na przewodnik wprowadzimy ładunek, w przewodniku wytworzy się pole elektryczne. Ładunki elektryczne będą się wówczas przemieszczać aż do wyrównania się potencjałów wszystkich punktów przewodnika. Ogólnie prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przestrzeni. W rozpatrywanym przykładzie występuje więc przepływ prądu wewnątrz przewodnika aż do momentu ustalenia się określonego rozkładu ładunku. Ma to np. miejsce w przypadku rozładowania kondensatora

**Dla wytworzenia prądu stałego niezbędne jest urządzenie, utrzymujące stałą różnicę potencjałów pomiędzy końcami przewodnika.**

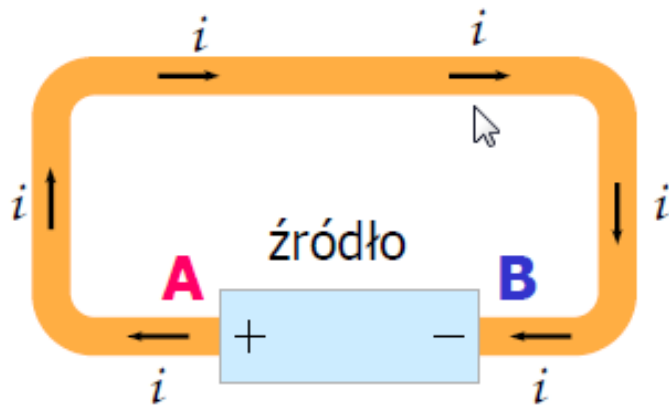
Do takich urządzeń należą tzw. źródła siły elektromotorycznej → źródło siły elektromotorycznej dostarcza do obwodu energię elektryczną kosztem energii innego rodzaju – chemicznej, mechanicznej ,...

# SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA



Wszystkie punkty przewodnika mają taki sam potencjał.

Elektrony swobodne poruszają się wewnątrz przewodnika w przypadkowych kierunkach. Brak jest wypadkowego ruchu nośników.



Do przewodnika dołączono źródło siły elektromotorycznej SEM.

Pomiędzy punktami A i B istnieje różnica potencjałów  $U = V_B - V_A$ .

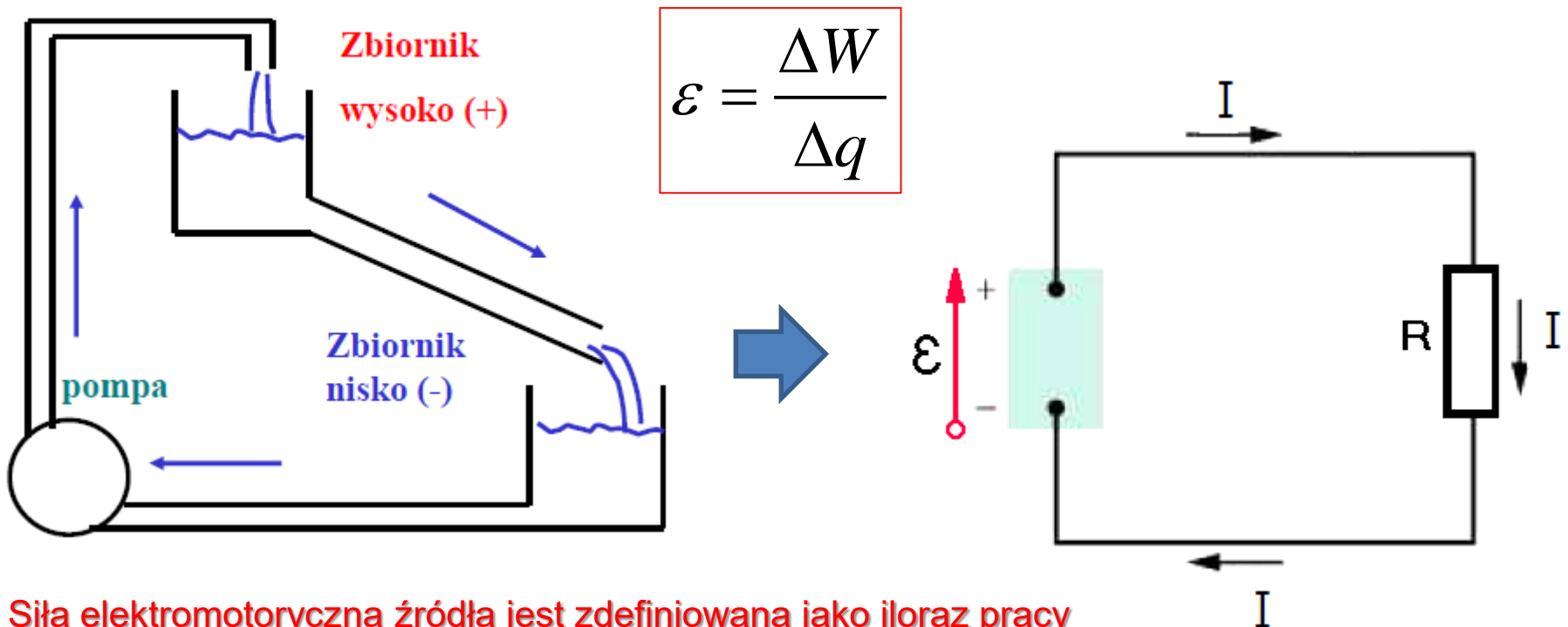
Istnieje wówczas przepływ elektronów swobodnych wewnątrz przewodnika od punktu B o niższym potencjale do punktu A o potencjale wyższym.

Przyjmuje się umowny kierunek przepływu prądu od wyższego do niższego potencjału.

# SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA

Praca wykonana w obwodzie elektrycznym przez siły zewnętrzne nad ładunkiem jednostkowym (umownie dodatnim) nosi nazwę siły elektromotorycznej (SEM).

SEM jest pracą przypadającą na jednostkę ładunku, jaką wykonuje źródło przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale do bieguna o większym potencjale



Siła elektromotoryczna źródła jest zdefiniowana jako iloraz pracy wykonanej przez źródło do wartości przenieszonego ładunku

# SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA

Źródło siły elektromotorycznej przenosi ładunek elektryczny wbrew siłom pola elektrycznego.

Siły przenoszące ładunek są nazywane siłami postronnymi.

**Siły postronne** przenosząc ładunek wykonują pracę nad ładunkiem.

Źródło wykonuje pracę nad ładunkami kosztem m.in.:

- energii chemicznej (ogniwo chemiczne)
- energii mechanicznej (prądnicą)
- energii termicznej (ogniwo termoelektryczne)
- energii słonecznej (ogniwo fotowoltaniczne)

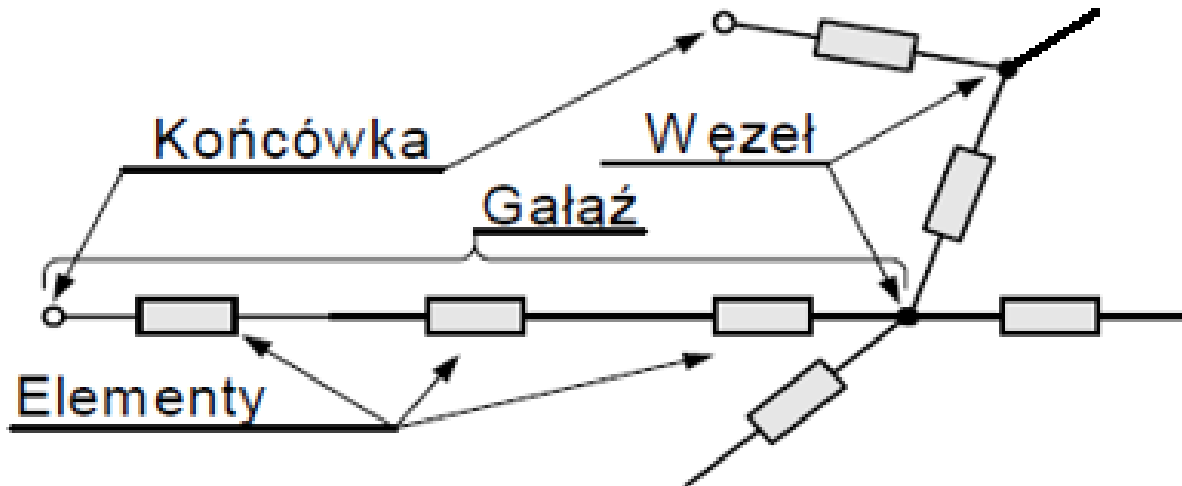
Siła elektromotoryczna (SEM) – czynnik powodujący przepływ prądu w obwodzie elektrycznym równy energii elektrycznej uzyskanej przez jednostkowy ładunek przemieszczany w urządzeniu (źródle) prądu elektrycznego w przeciwnym kierunku do sił pola elektrycznego oddziałującego na ten ładunek.

## WĘZŁ OBWODU ELEKTRYCZNEGO

Węzłem nazywamy wyprowadzoną na zewnątrz końcówkę gałęzi do której dołączona jest co najmniej jedna końcówka innej gałęzi.

Punkt obwodu elektrycznego (początek gałęzi), z którego wychodzą co najmniej trzy przewody (gałęzie).

Prądy tych gałęzi spełniają pierwsze (prądowe) prawo Kirchhoffa



## GAŁĄŻ OBWODU ELEKTRYCZNEGO

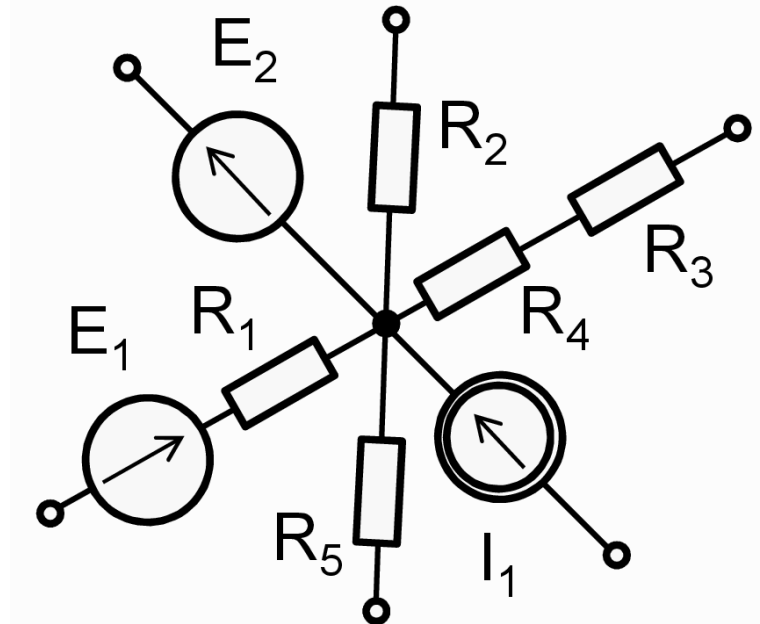
Gałąź jest elementem dwukońcówkowym (dwuzaciskowym). W „środku” jej może się znajdować dowolna liczba różnych elementów podstawowych.

Jeden lub kilka elementów obwodu elektrycznego połączonych szeregowo, z których każdy ma co najmniej dwie końcówki – na zewnątrz wyprowadzone są jedynie dwie końcówki → gałąź jest dwójnikiem.

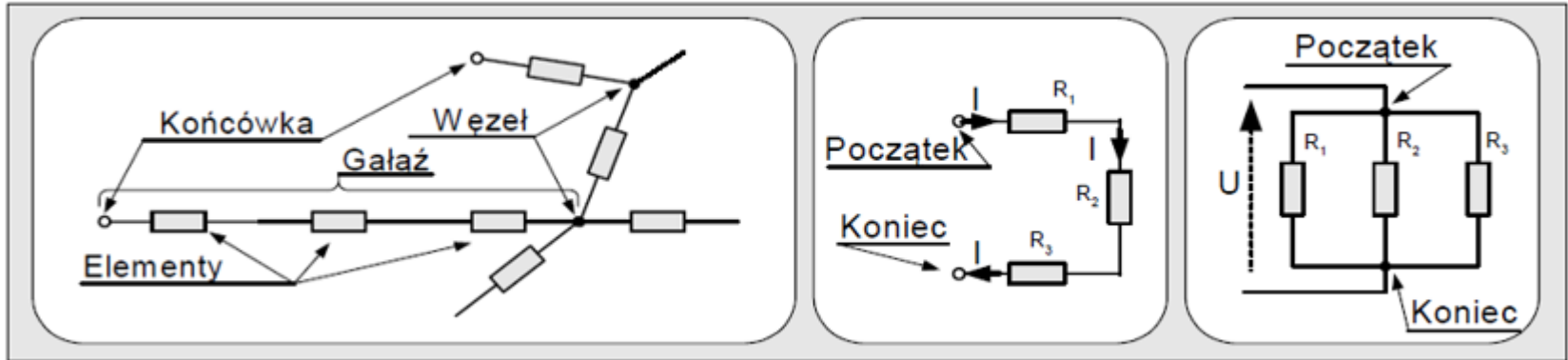
Oznacza to, że przez wszystkie elementy danej gałęzi przepływa prąd elektryczny o takiej samej wartości natężenia.

Najprostszymi gałęziami są rezystancje, pojemności i indukcyjności oraz idealne źródło napięciowe.

**IDEALNE ŹRÓDŁO PRĄDOWE NIE TWORZY SAMO GAŁĘZI (BO PRZY PRĄDZIE ŹRÓDŁOWYM RÓWNYM ZERO STANOWI PRZERWĘ W OBWODZIE).**



# GAŁĄŻ OBWODU ELEKTRYCZNEGO



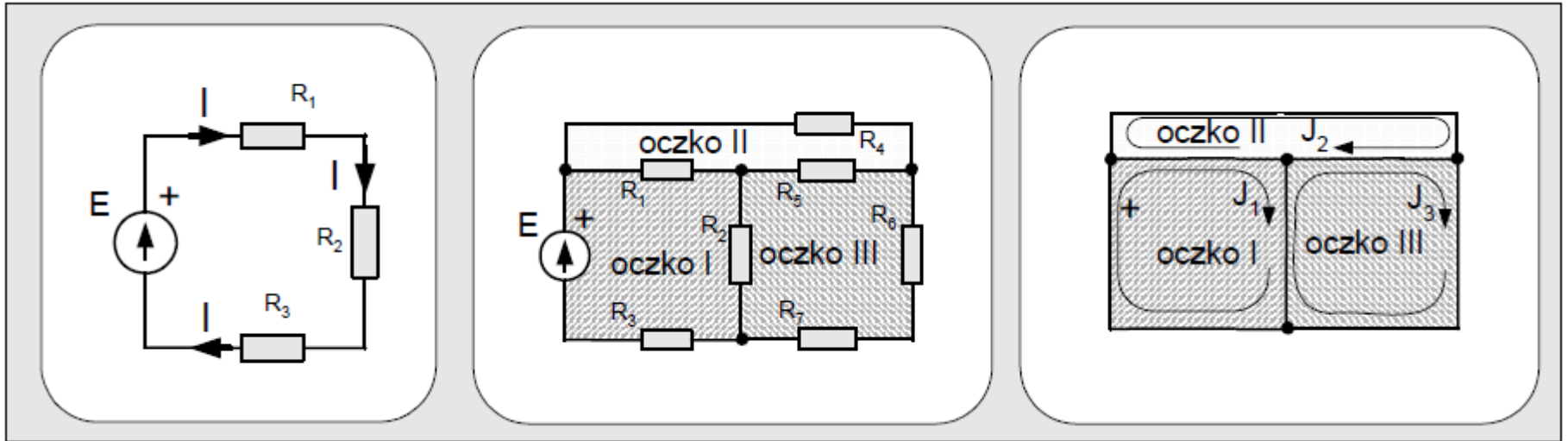
## Połączenia występujące w obwodzie elektrycznym

- połączenie szeregowe gałęzi obwodu
- połączenie równoległe gałęzi obwodu

Połączenie gałęzi obwodu jest **połączeniem szeregowym**, jeżeli przepływa przez nie ten sam prąd.

Połączenie gałęzi obwodu jest **połączeniem równoległym**, jeżeli na wszystkich połączonych gałęziach występuje to samo napięcie.

## OCZKO OBWODU ELEKTRYCZNEGO



Schemat elektryczny pojedynczego oczka – obwód nie rozgałęziony;

Schemat elektryczny obwodu elektrycznego – obwód rozgałęziony;

Graf obwodu elektrycznego, zaznaczono przepływ prądów oczkowych

Oczko obwodu (kontur obwodu) jest zbiorem połączonych ze sobą gałęzi, tworzących zamkniętą drogę dla przepływu prądu.

Cechą charakterystyczną oczka jest to, że po usunięciu dowolnej jednej jego gałęzi pozostałe gałęzie nie tworzą drogi zamkniętej dla prądu.

Obwodem nazywamy oczko lub zbiór oczek, połączonych ze sobą i mających jedną lub więcej dróg dla przepływu prądu. Obwód o jednym oczku nazywany jest obwodem elementarnym (nie rozgałęzionym).

Obwód składający się z więcej niż jednego oczka (obwód rozgałęziony) nazywany jest układem elektrycznym.

# **I PRAWO KIRCHHOFFA**

# I PRAWO KIRCHHOFFA

**Prawa Kirchhoffa** dotyczą bilansu prądów w węźle układu i bilansu napięć w zamkniętym oczku sieci elektrycznej.



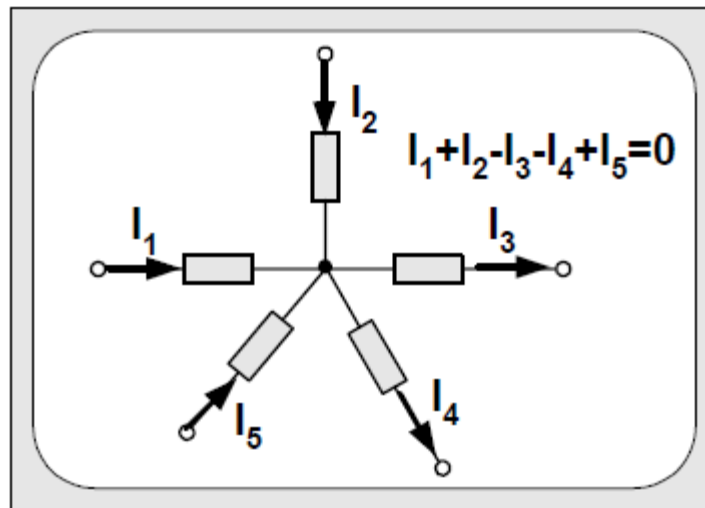
**Gustav Robert Kirchhoff**  
(ur. 1824, zm. 1887)

– niemiecki fizyk, twórca prawa promieniowania cieplnego dotyczącego zależności między zdolnością emisyjną i absorpcyjną, oraz praw dotyczących obwodów elektrycznych (pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa).

## Prawo Kirchhoffa w odniesieniu do prądów,

prądy wpływające do węzła są zapisywane w równaniu ze znakiem plus (+) a prądy odpływające od węzła są zapisywane w równaniu ze znakiem minus (-)

*Suma prądów wpływających do węzła jest równa sumie prądów odpływających od węzła.*



$$\sum_{i=1}^n i_i = \sum_{j=1}^m i_j$$

*Dla wartości chwilowych*

# I PRAWO KIRCHHOFFA

dla węzła obwodu elektrycznego  
suma algebraiczna natężeń prądów wpływających i wypływających  
jest równa zero

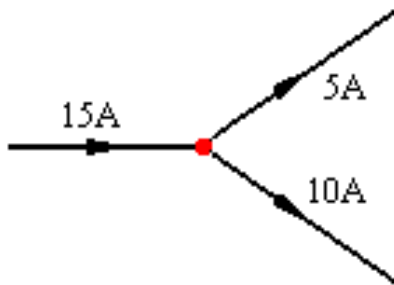


$$\sum_{a \text{ lg}} I = 0$$

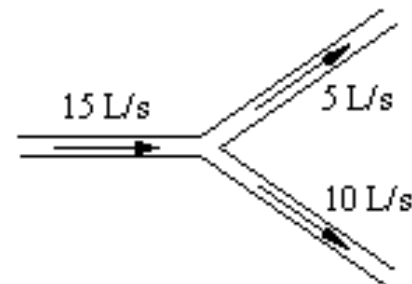
Suma algebraiczna jest wynikiem  
dodawania jednomianów  
(np.  $2a$ ,  $-43a$ , ...), które nazywamy  
wyrazami tej sumy.

$2a + b - 43a - 5$  **suma algebraiczna**

Electricity:

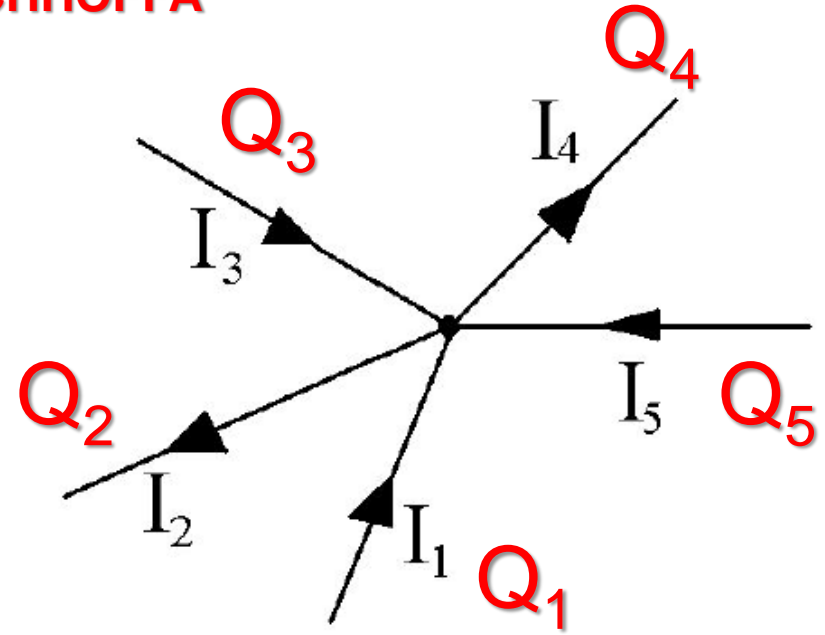


Water analogy:



## I PRAWO KIRCHHOFFA

Pierwsze prawo Kirchhoffa odnosi się do węzłów i jest zapisanym w specyficznej postaci równaniem ciągłości. W stanie ustalonym ładunek dopływający do węzła w danym czasie powinien być równy ładunkowi odpływającemu z węzła w tym samym czasie.



Prąd elektryczny jest przepływem ładunków, a w węźle ładunek nie może:

- gromadzić się
- zostać zniszczony
- zostać wytworzony

ZASADA ZACHOWANIA ŁADUNKU

Co pozwala stwierdzić, że całkowity ładunek wpływający do węzła sieci musi być równy całkowitemu ładunkowi wypływającemu.

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{j=1}^m Q_j$$

# I PRAWO KIRCHHOFFA

Uważając ładunek i prąd dopływające do węzła za dodatnie, a odpływające z niego – za ujemne,



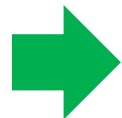
$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q_2 + Q_4$$



$$Q_1 + Q_3 + Q_5 - Q_2 - Q_4 = 0$$

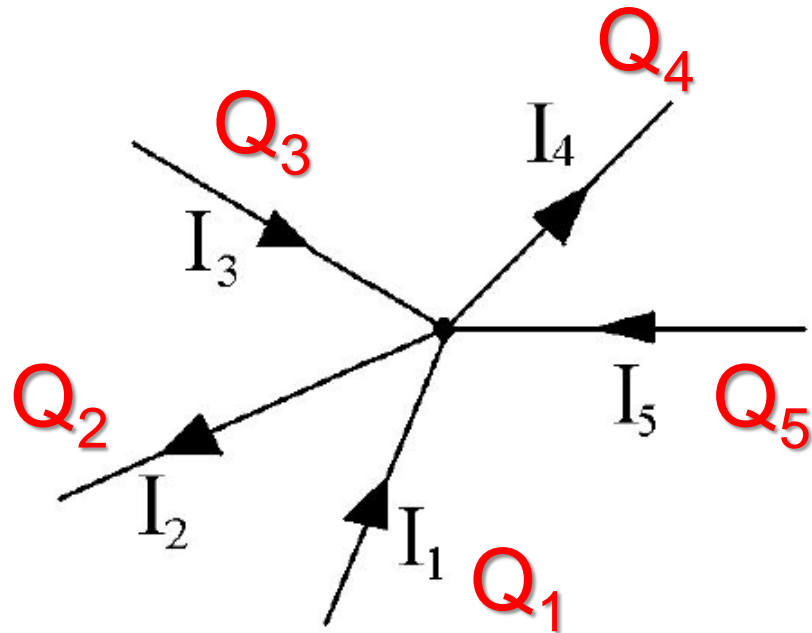


$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{\Delta t} = 0$$



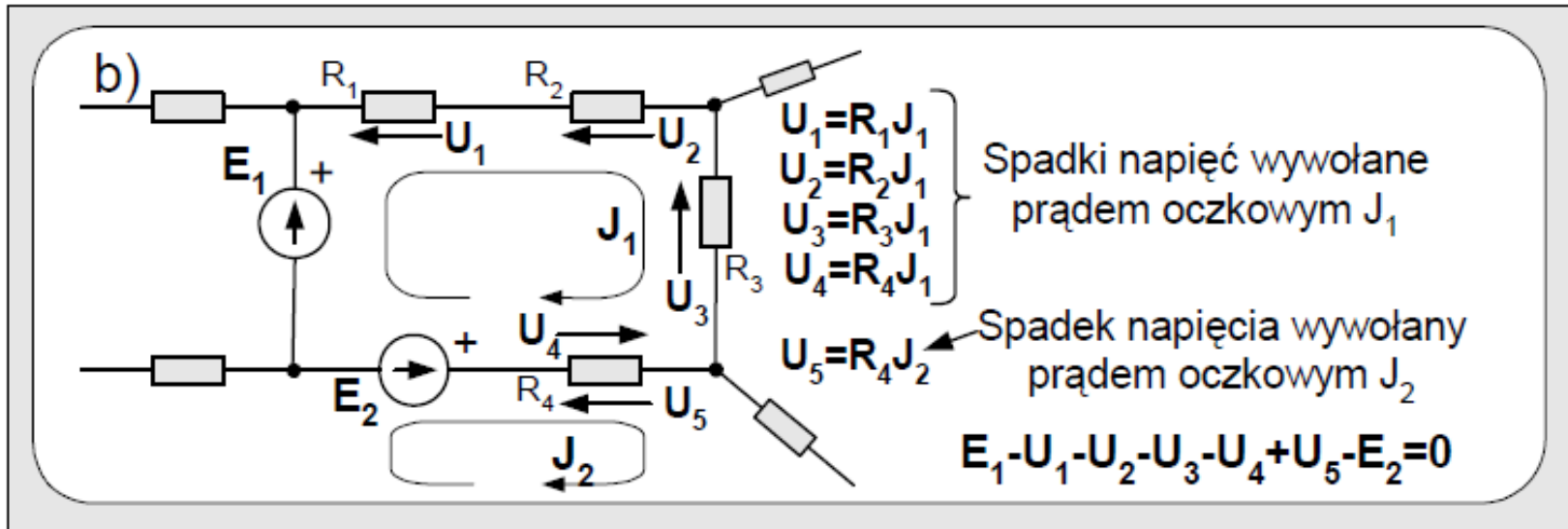
$$I_1 + I_3 + I_5 - I_2 - I_4 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\pm I_i) = 0$$

*Suma algebraiczna prądów zbiegających się w dowolnym węźle obwodu jest równa zero*



## **II PRAWO KIRCHHOFFA**

## II PRAWO KIRCHHOFFA



Prawo Kirchhoffa w odniesieniu do napięć,

*Suma spadków napięć w zamkniętym oczku jest równa zero*

(dotyczy to spadków napięć na odbiornikach łącznie z napięciami na zaciskach źródeł występujących w gałęziach danego zamkniętego oczka).

napięcia których zwrot jest zgodny z kierunkiem prądu

oczkowego są zapisywane w równaniu ze znakiem plus (+) a napięcia których zwrot jest przeciwny do kierunku przepływu prądu oczkowego są zapisywane w równaniu ze znakiem minus (-), taka sama zasada obowiązuje przy źródłach które występują w danym oczku.

## II PRAWO KIRCHHOFFA

algebraiczna suma wszystkich sił elektromotorycznych występujących w oczku sieci równa jest sumie występujących w tym oczku spadków napięć.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n E_i$$



$$U_1 + U_2 + U_3 - U_4 - U_5 = E_2 - E_4$$

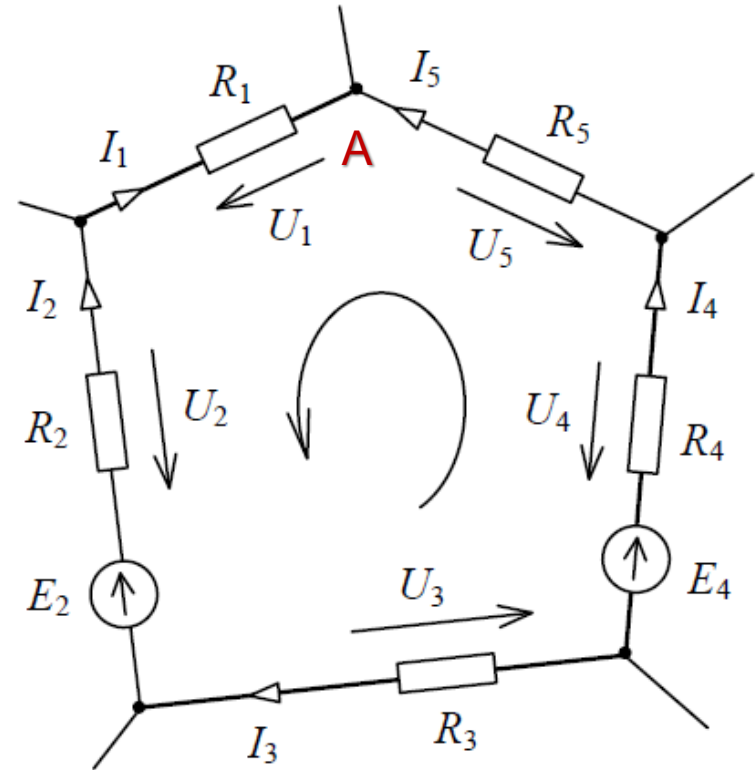
suma spadków napięć w zamkniętym oczku jest równa zero



$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 - E_2 - I_3 R_3 + E_4 + I_4 R_4 + I_5 R_5 = 0$$



$$U_1 + U_2 - E_2 + U_3 + E_4 - U_4 - U_5 = 0$$



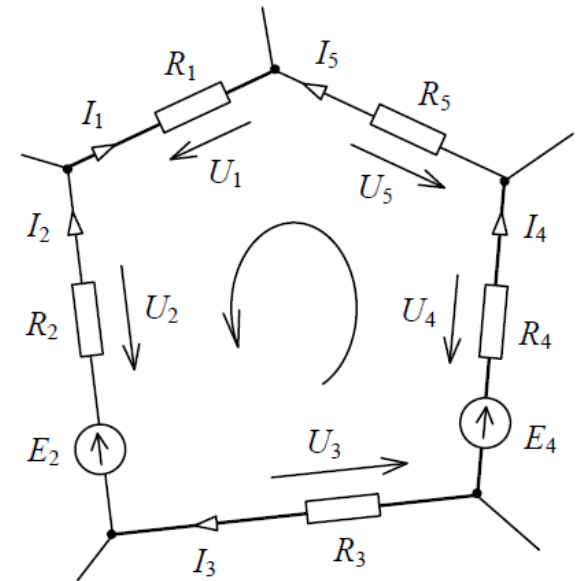
## II PRAWO KIRCHHOFFA

Napięcia źródeł są strzałkowane generatorowo, a na rezystorach – odbiornikowo (względem zwrotu prądów gałęzi);

Przy stosowaniu II prawa Kirchhoffa należy przestrzegać określonej konwencji, dotyczącej znaków prądów i sił elektromotorycznych. Zwykle wybiera się w dowolny sposób kierunek obiegu oczka (zgodnie z ruchem wskazówek zegara lub przeciwnie).

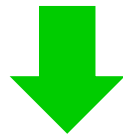
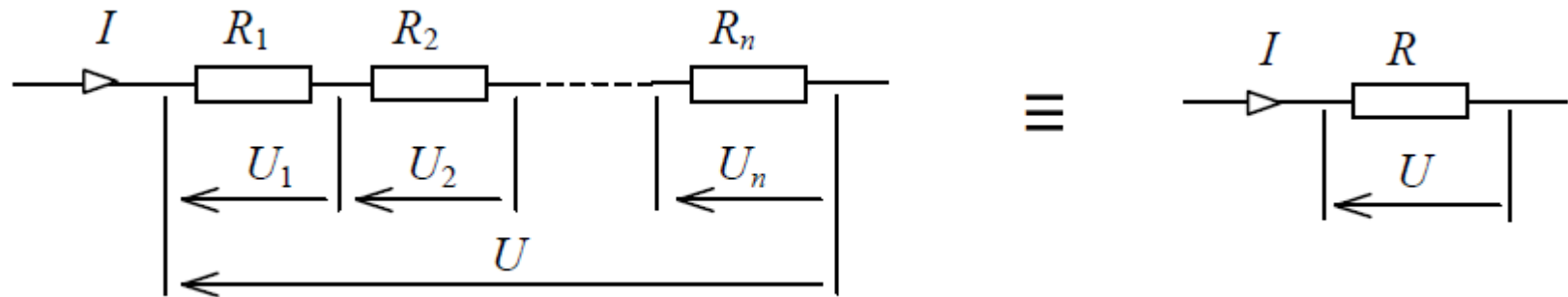
Sumowanie napięć jest zgodne z przyjętym zwrotem obiegu oczka, tzn.:

- napięcia zwrócone zgodnie ze zwrotem obiegu oczka są pisane ze znakiem „+”, a zwrócone przeciwnie do zwrotu obiegu oczka – ze znakiem „-”;
- wyrażenia  $R_k I_k$  są pisane po przeciwnej niż  $E_k$  stronie równania ze znakiem „+”, gdy prądy w obieganych gałęziach są zwrócone zgodnie ze zwrotem obiegu, a ze znakiem „-”, gdy są zwrócone przeciwnie;



# ŁĄCZENIE REZYSTORÓW

## SZEREGOWE POŁĄCZENIE REZYSTORÓW



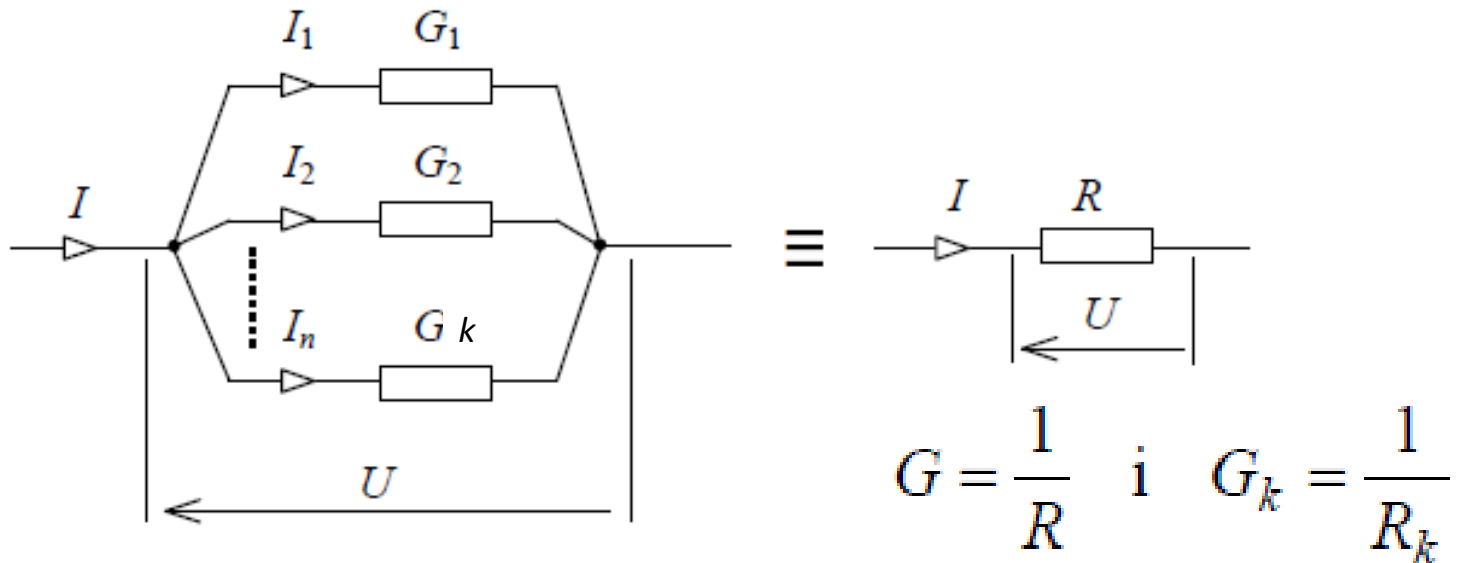
$$U = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I = R \cdot I$$

$$R = \sum_{k=1}^n R_k$$



$$\frac{1}{G} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}$$

## RÓWNOLEGŁE POŁĄCZENIE REZYSTORÓW



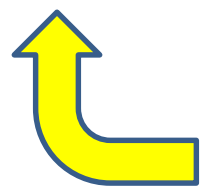
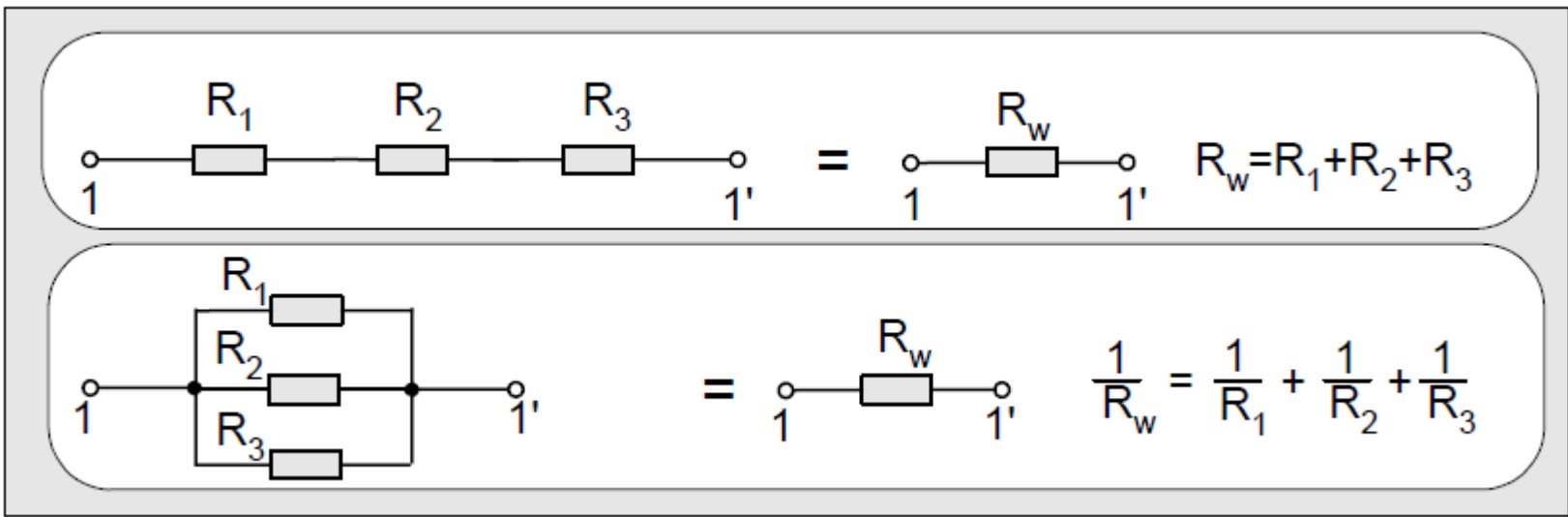
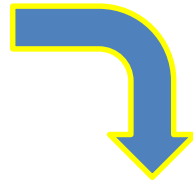
$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n G_k \cdot U = G \cdot U$$



$$G = \sum_{k=1}^n G_k$$
$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

# POŁĄCZENIA REZYSTORÓW

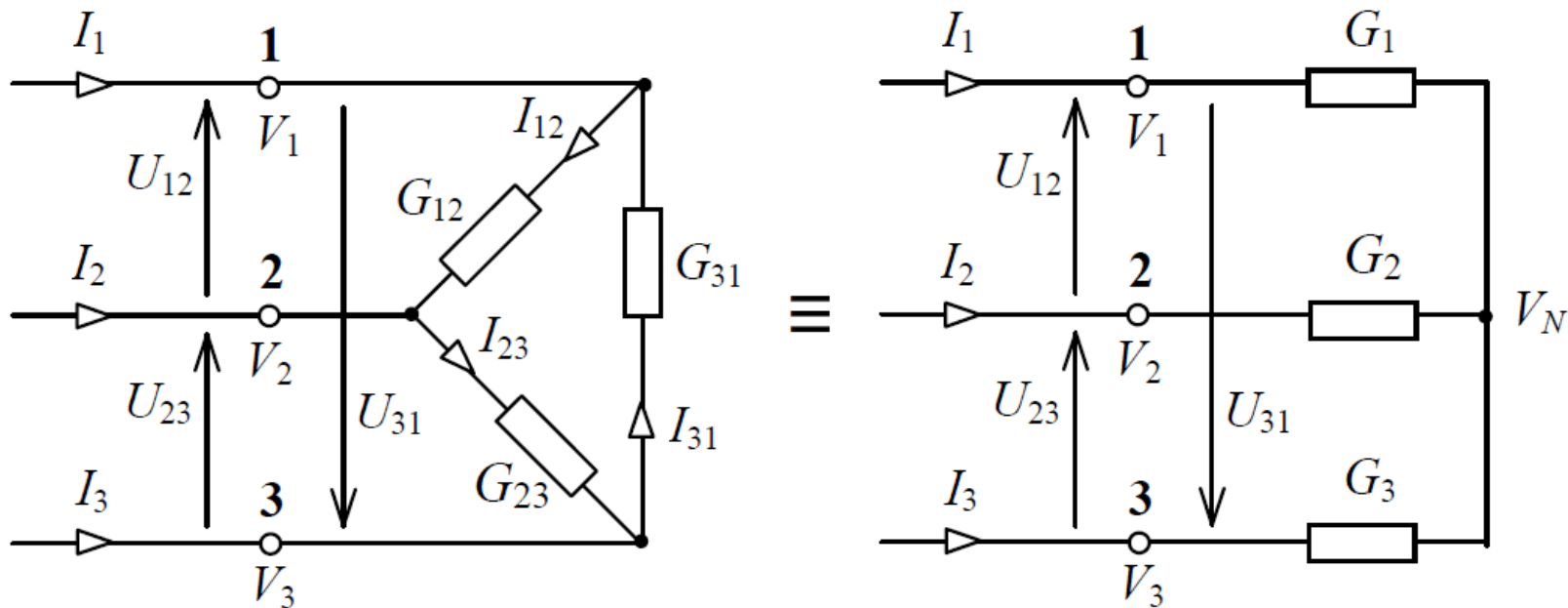
*Polączenie*      $I = \text{const}$   
*szeregowe*      $R_W = \sum_{i=1}^n R_i$



*Polączenie*      $U = \text{const}$   
*równoległe*      $\frac{1}{R_W} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$

# PRZEKSZTAŁCENIE POŁĄCZEŃ REZYSTORÓW GWIAZDA / TRÓJKĄT – TRÓJKĄT / GWIAZDA

Równoważność układów zachodzi przy jednakowych spadkach napięć pomiędzy i wartościami prądów płynących przez konduktancje obwodu



$$I_{12} = G_{12}(V_1 - V_2) ,$$

$$I_{23} = G_{23}(V_2 - V_3) ,$$

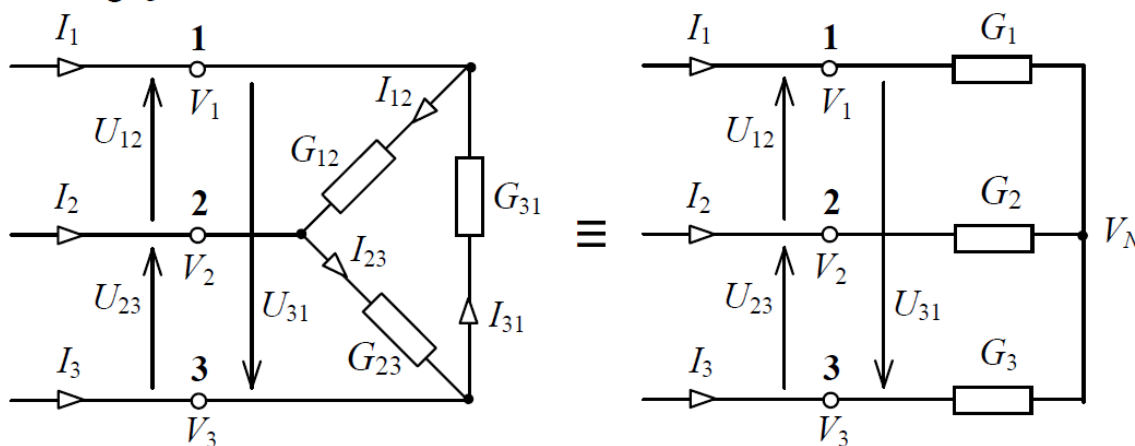
$$I_{31} = G_{31}(V_3 - V_1) ;$$

$$I_1 = G_1(V_1 - V_N) ,$$

$$I_2 = G_2(V_2 - V_N) ,$$

$$I_3 = G_3(V_3 - V_N) ;$$

# PRZEKSZTAŁCENIE POŁĄCZEŃ REZYSTORÓW GWIAZDA / TRÓJKĄT – TRÓJKĄT / GWIAZDA



$$I_1 = I_{12} - I_{31}, \quad I_2 = I_{23} - I_{12}, \quad I_3 = I_{31} - I_{23} \quad \Rightarrow \quad (\text{prądy dopływające trójkąta});$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_N = \frac{G_1 \cdot V_1 + G_2 \cdot V_2 + G_3 \cdot V_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad \Rightarrow \quad (\text{prądy dopływające gwiazdy});$$

(prądy dopływające trójkąta)

$$I_1 = G_{12} \cdot (V_1 - V_2) + G_{31} \cdot (V_1 - V_3)$$

$$I_2 = G_{23} \cdot (V_2 - V_3) + G_{12} \cdot (V_2 - V_1)$$

$$I_3 = G_{31} \cdot (V_3 - V_1) + G_{23} \cdot (V_3 - V_2)$$

(prądy dopływające gwiazdy)

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_2 \cdot (V_1 - V_2) + G_3 \cdot (V_1 - V_3)],$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_1 \cdot (V_2 - V_1) + G_3 \cdot (V_2 - V_3)],$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_1 \cdot (V_3 - V_1) + G_2 \cdot (V_3 - V_2)].$$

# PRZEKSZTAŁCENIE POŁĄCZEŃ REZYSTORÓW GWIAZDA / TRÓJKĄT – TRÓJKĄT / GWIAZDA

(prądy dopływające trójkąta)

(prądy dopływające gwiazdy)

$$\begin{aligned} I_1 = G_{12} \cdot (V_1 - V_2) + G_{31} \cdot (V_1 - V_3) &\equiv I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_2 \cdot (V_1 - V_2) + G_3 \cdot (V_1 - V_3)] , \\ I_2 = G_{23} \cdot (V_2 - V_3) + G_{12} \cdot (V_2 - V_1) &\equiv I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_1 \cdot (V_2 - V_1) + G_3 \cdot (V_2 - V_3)] , \\ I_3 = G_{31} \cdot (V_3 - V_1) + G_{23} \cdot (V_3 - V_2) &\equiv I_3 = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot [G_1 \cdot (V_3 - V_1) + G_2 \cdot (V_3 - V_2)] . \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy tych samych napięciach (różnicach potencjałów) – w wyrażeniach na prądy dopływające gwiazdy i trójkąta – otrzymuje się wzory:



$$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3} , \quad G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} , \quad G_{31} = \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

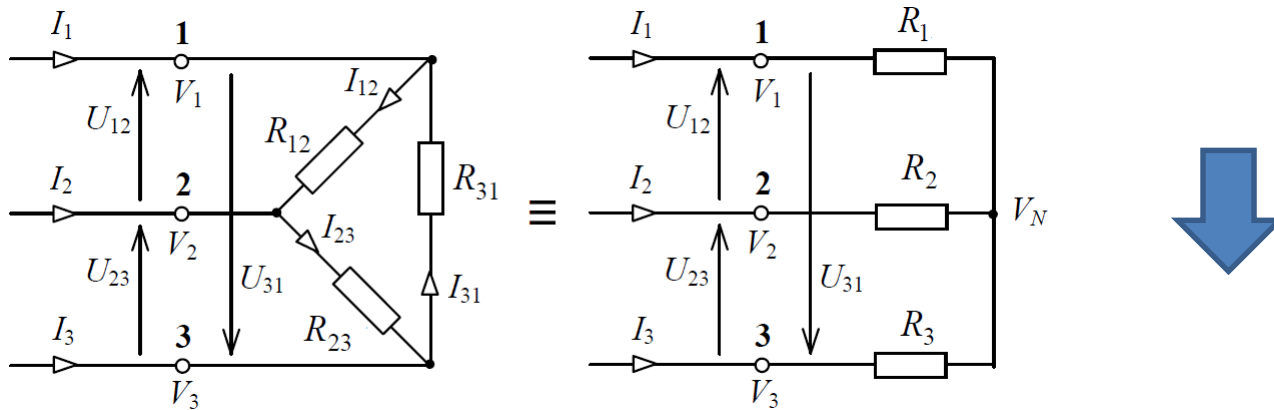


$$G_1 = G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} \cdot G_{31}}{G_{23}} , \quad G_2 = G_{12} + G_{23} + \frac{G_{12} \cdot G_{23}}{G_{31}} , \quad G_3 = G_{23} + G_{31} + \frac{G_{23} \cdot G_{31}}{G_{12}}$$

# PRZEKSZTAŁCENIE POŁĄCZEŃ REZYSTORÓW GWIAZDA / TRÓJKĄT – TRÓJKĄT / GWIAZDA

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$



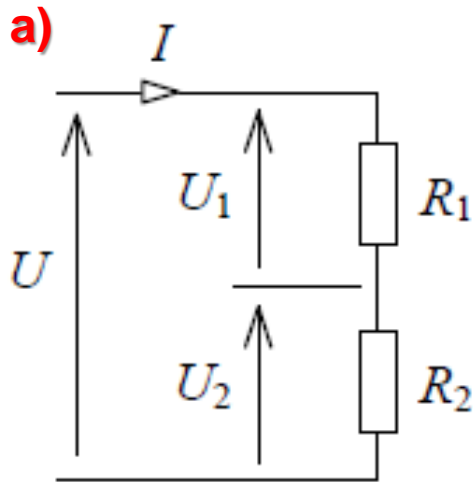
Zakładając, że  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  ➔  $R_{12} = 3R, R_{23} = 3R, R_{31} = 3R,$

Zakładając, że  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R$  ➔  $R_1 = \frac{R}{3}, R_2 = \frac{R}{3}, R_3 = \frac{R}{3},$

# **REZYSTANCYJNY DZIELNIK NAPIĘCIA / PRĄDU**

# REZYSTANCYJNY DZIELNIK NAPIĘCIA

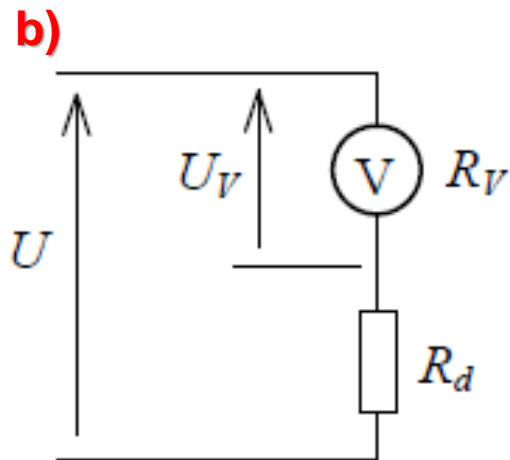
## ROZSZERZANIE ZAKRESU POMIAROWEGO WOLTOMIERZA



Połączone szeregowo rezystancje (rys. a) tworzą *dzielnik napięcia*. Napięcie zasilające ten układ „dzieli się” na rezystancjach proporcjonalnie do ich wartości:

$$U_1 = R_1 \cdot I = R_1 \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U ,$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = R_2 \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$



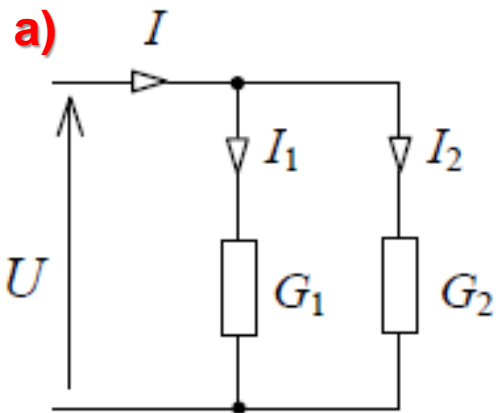
Układ dzielnika napięcia jest wykorzystywany m.in. do *rozszerzania zakresu pomiarowego woltomierza prądu stałego* (rys. b). Aby zakres pomiarowy woltomierza o rezystancji  $R_V$  rozszerzyć  $n$  razy, trzeba połączyć z nim szeregowo taki rezystor  $R_d$  (opornik dodatkowy), że

$$\frac{U_V}{U} = \frac{1}{n} \quad \text{czyli} \quad \frac{R_V}{R_V + R_d} = \frac{1}{n}$$

$$\text{więc} \quad R_d = (n - 1) \cdot R_V .$$

# REZYSTANCYJNY DZIELNIK PRĄDU

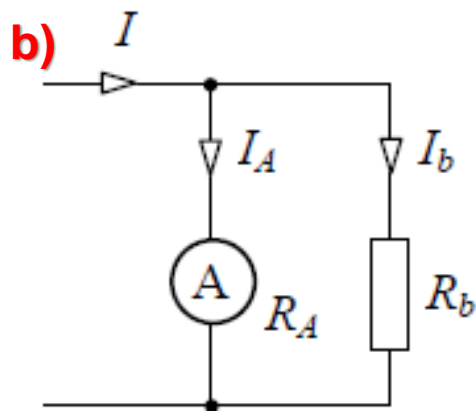
## ROZSZERZANIE ZAKRESU POMIAROWEGO AMPEROMIERZA



Połączone równolegle konduktancje (rys. a) tworzą *dzielnik prądu*. Prąd dopływający do tego układu „dzieli się” na prądy gałęziowe proporcjonalnie do wartości konduktancji gałęzi:

$$I_1 = G_1 \cdot U = G_1 \cdot \frac{I}{G_1 + G_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_2 = G_2 \cdot U = G_2 \cdot \frac{I}{G_1 + G_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$



Układ dzielnika prądu jest wykorzystywany m.in. do *rozszerzania zakresu pomiarowego amperomierza prądu stałego* (rys. b). Aby zakres pomiarowy amperomierza o rezystancji  $R_A$  rozszerzyć  $n$  razy, trzeba połączyć z nim równolegle taki rezystor  $R_b$  (bocznik), że

$$\frac{I_A}{I} = \frac{1}{n} \quad \text{czyli} \quad \frac{R_b}{R_A + R_b} = \frac{1}{n}$$

więc 
$$R_b = \frac{R_A}{n-1}$$

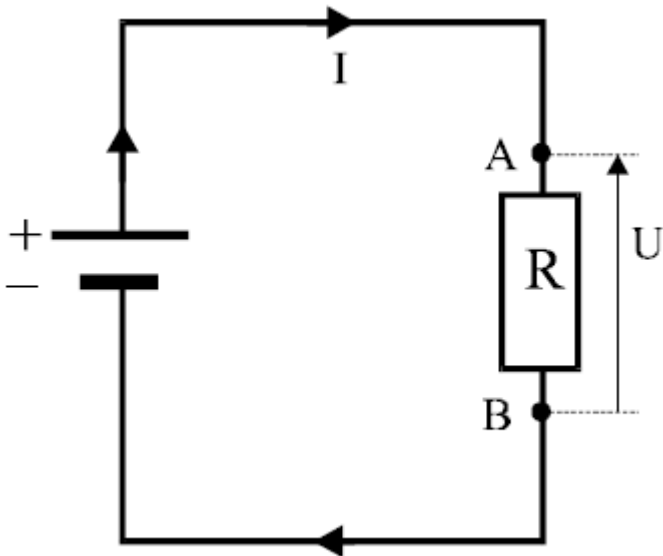
# **MOC PRĄDU STAŁEGO**

## MOC PRĄDU STAŁEGO

Obwód elektryczny, zawierający źródło prądu elektrycznego połączone z odbiornikiem energii elektrycznej np. grzejnikiem.

Niech przez grzejnik o oporze  $R$  przepływa prąd o natężeniu  $I$ , a napięcie na zaciskach A i B grzejnika niech wynosi  $U$ .

Aby określić pracę prądu elektrycznego i jego moc obliczamy pracę  $dW$  → praca  $dW$  wykonana podczas przeniesienia ładunku  $dq$  od punktu A do punktu B, czyli między punktami pola elektrycznego o różnicy potencjałów  $U$



$$dW = dqU = I dt U$$

Moc – praca wykonana w jednostce czasu

$$P = \frac{dW}{dt} = UI \quad [W]$$

## MOC PRĄDU STAŁEGO

Całkując powyższe wyrażenie, otrzymujemy wzór na pracę prądu elektrycznego:

$$W = \int_0^t UI dt$$

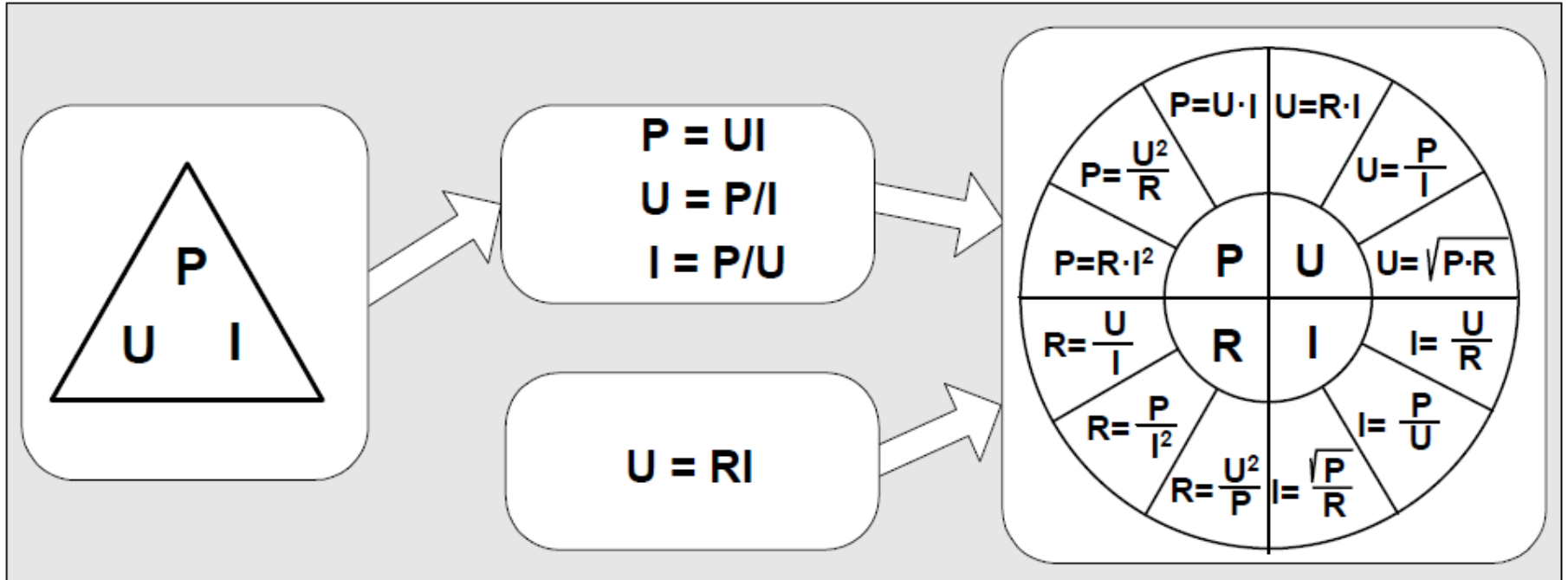
W przypadku prądu stałego, tj. prądu, którego napięcie i natężenie są stałe

$$W = UIt \quad [J]$$

Energia potencjalna ładunku przepływającego przez odbiornik maleje. Wynika to z faktu, że potencjał punktu A jest wyższy niż potencjał punktu B. Energia elektryczna ulega przy tym przemianie w inny rodzaj energii, zależnie od typu odbiornika. Jeżeli odbiornik zawiera tylko rezystancję  $R$ , to energia prądu elektrycznego wydzielona w postaci ciepła, które nazywamy ciepłem Joule'a  $\rightarrow Q$ .

$$W = Q = UIt = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R}$$

# OBWÓD ELEKTRYCZNY



Podstawowe zależności zachodzące w liniowych obwodach prądu stałego pomiędzy napięciem (U), prądem (I), mocą (P) i rezystancją (R);

- „trójkąt” trzech podstawowych wielkości fizycznych w obwodzie elektrycznym prądu stałego;
- zestawienie związków między U, I, P, R.

# **ANALIZA I SYNTEZA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH**

# ANALIZA I SYNTEZA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Wyznaczenie rozptywu prądów i rozkładu napięć w obwodzie lub jego części przy danej strukturze obwodu oraz parametrach wszystkich elementów może być zrealizowane jedną z poniższych metod:

- METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA
- METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH
- METODA TRANSFIGURACJI
- METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH
- METODA SUPERPOZYCJI
- METODA THEVENINA
- METODA NORTONA

# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

W ogólnym przypadku w każdej gałęzi obwodu płynie inny prąd, z czego wynika że liczba prądów jest równa liczbie gałęzi obwodu. Do obliczenia tych prądów należy ułożyć tyle niezależnych równań, ile dany obwód ma gałęzi.

- Pomiędzy liczbą oczek, gałęzi i węzłów zachodzi zależność

$$g = (w - 1) + o$$

$g$  – liczba gałęzi,  
 $o$  – liczba oczek,  
 $w$  – liczba węzłów.

- W obwodzie na rysunku

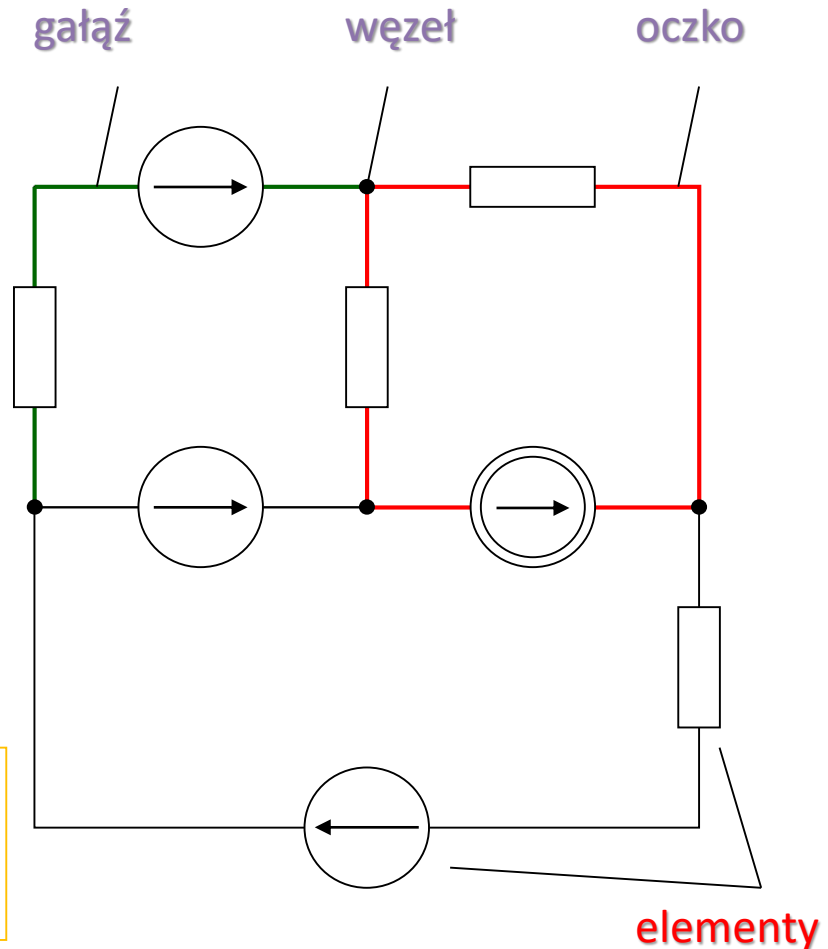
$$g = 6$$

$$o = 3$$

$$w = 4$$

$$6 = (4 - 1) + 3$$

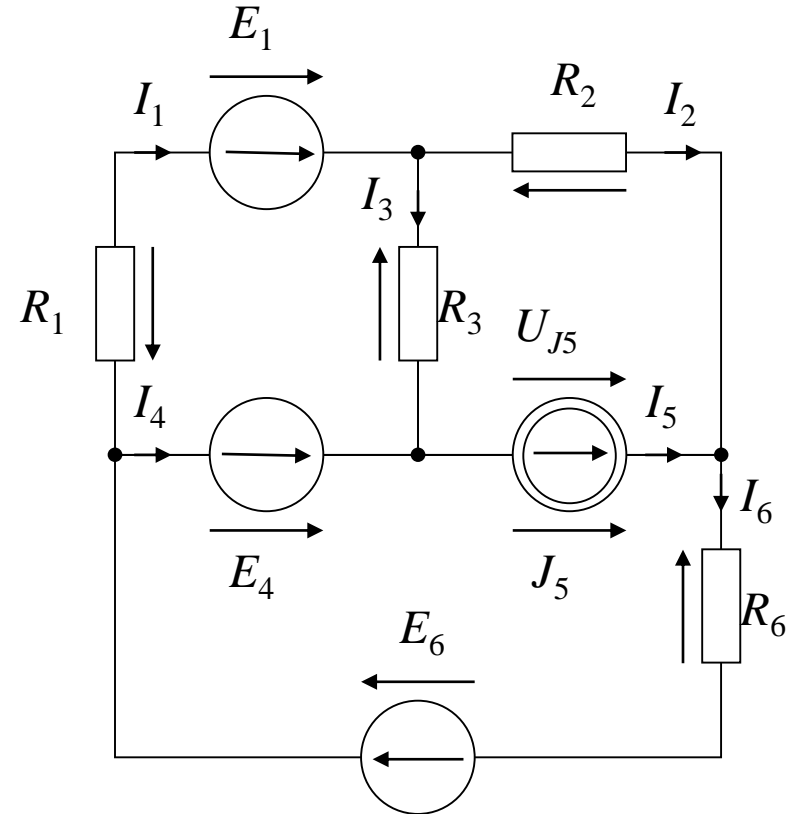
6 gałęzi  
4 węzły  
3 oczka



# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy obwodu. W efekcie zastosowania praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań algebraicznych.

- Rozwiązaniem są np. poszukiwane prądy gałęziowe, których jest  $g \rightarrow$  należy ułożyć właśnie tyle niezależnych równań.
- Z zależności  $\rightarrow g = (w - 1) + o$  wynika, że możemy do tego celu wykorzystać:
  - $w - 1$  równań ułożonych dla  $w - 1$  węzłów wg pierwszego prawa Kirchhoffa
  - $o$  równań ułożonych dla wszystkich oczek wg drugiego prawa Kirchhoffa.



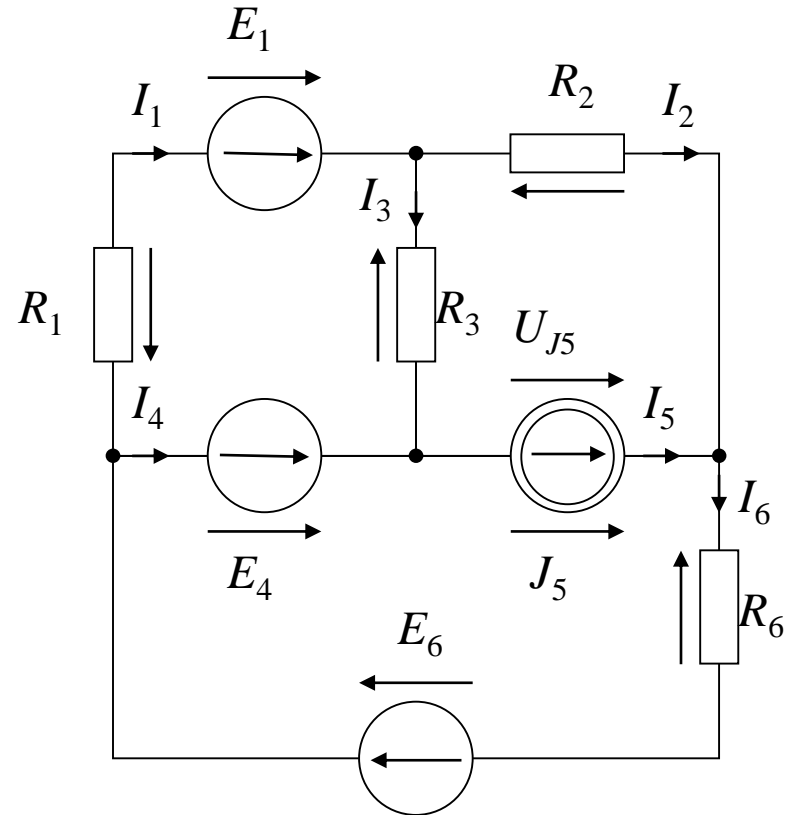
W metodzie klasycznej wykorzystującej bezpośrednio prawa Kirchhoffa istnieje potrzeba rozwiązania układu  $b$  równań z  $b$  niewiadomymi

$\rightarrow$  metoda złożona obliczeniowo.

W efekcie metodę tę stosuje się głównie w przypadku obwodów o małej liczbie elementów.

# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

1. Ustala się dowolnie kierunki prądów we wszystkich gałęziach obwodu.
2. Ustala się spadki napięć (przeciwnie do strzałki prądu) na wszystkich rezystancjach (reaktancjach) łącznie z rezystancjami wewnętrznymi źródeł napięcia.
3. Ustala się spadki napięć (zgodnie do strzałki prądu) na wszystkich źródłach
4. Układa się  $(w-1)$  równań gałęziowych według pierwszego prawa Kirchhoffa w opuszczając jeden dowolny węzeł.
5. Układa się tyle równań według drugiego prawa Kirchhoffa ile dany obwód zawiera oczek.
6. Rozwiązuje się powyższy układ ze względu na nieznane prądy gałęziowe.



Uwaga: jeżeli w obwodzie występują źródła prądu, to prąd gałęziowy jest znany i można od razu zamiast niego używać prądu źródłowego  $\rightarrow I_5 = J_5$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_4 + I_3 - J_5 = 0$$

$$J_5 + I_2 - I_6 = 0$$

$$I_5 = J_5$$

Źródło prądowe

Zaletą metody równań Kirchhoffa jest duża prostota w trakcie układania równań, natomiast wadą jest duża pracochłonność przy ich rozwiązywaniu

# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

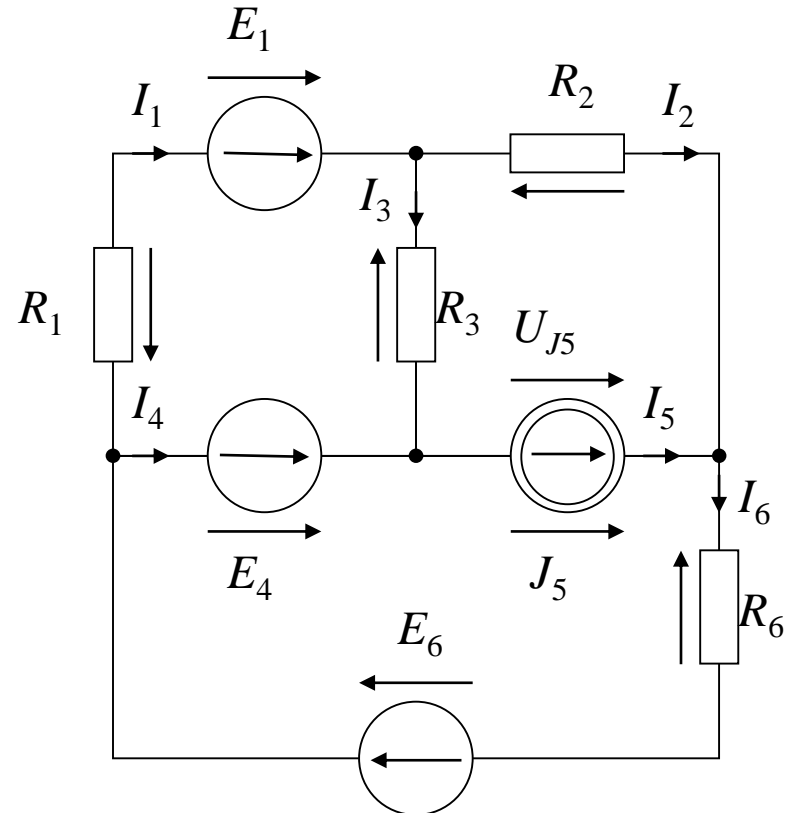
$$E_1 - R_3 I_3 - E_4 - R_1 I_1 = 0$$

$$R_3 I_3 - R_2 I_2 - U_{J_5} = 0$$

$$E_4 + U_{J_5} - R_6 I_6 + E_6 = 0$$

Powstały układ równań rozwiązujemy ze względu na niewiadome (prądy gałęziowe i napięcia na źródłach prądowych).

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_4 + I_3 - J_5 = 0 \\ J_5 + I_2 - I_6 = 0 \\ E_1 - R_3 I_3 - E_4 - R_1 I_1 = 0 \\ R_3 I_3 - R_2 I_2 - U_{J_5} = 0 \\ E_4 + U_{J_5} - R_6 I_6 + E_6 = 0 \end{cases}$$

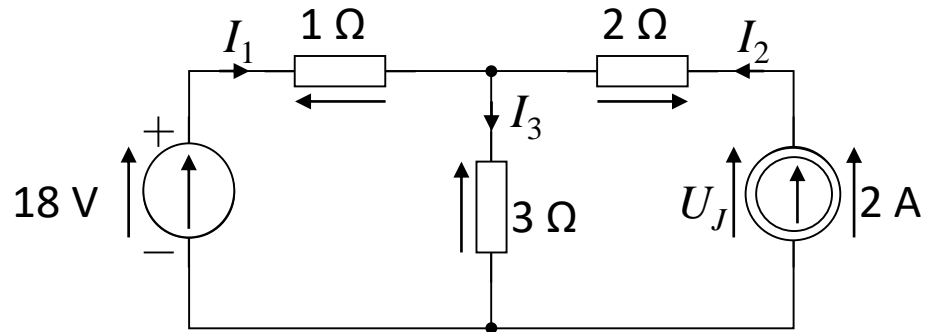
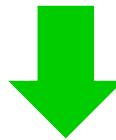
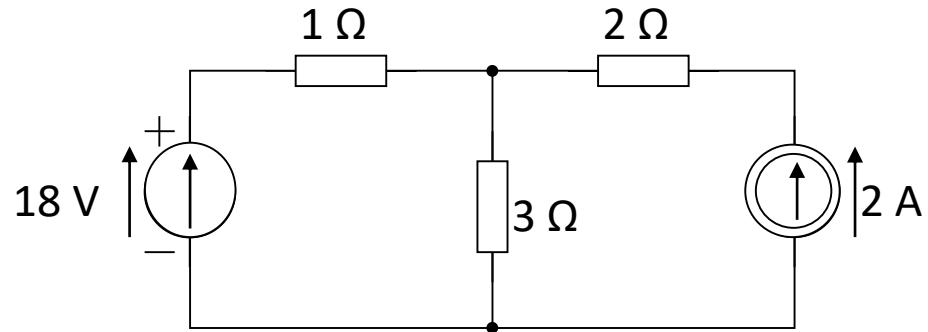


$$I_1, I_2, I_3, I_4, U_{J_5}, I_6$$

Metoda równań Kirchhoffa (klasyczna) pozwala na rozwiązanie dowolnego obwodu elektrycznego, w praktyce przy dużej liczbie gałęzi i węzłów otrzymujemy złożone układy wielu równań, nie zawsze łatwych do rozwiązania.

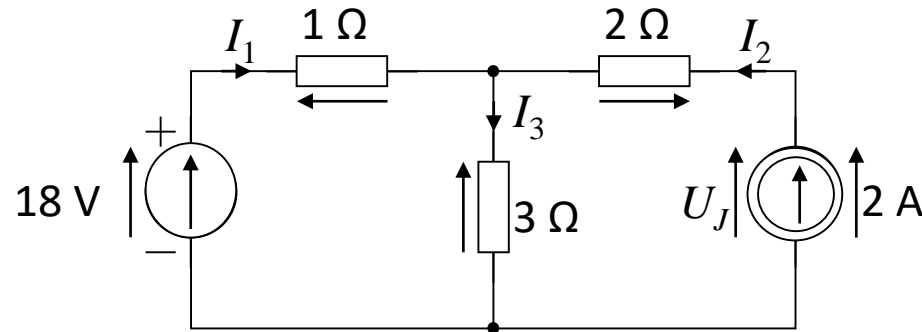
# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

Wyznaczyć rozptyw prądów metodą równań Kirchhoffa



# METODA RÓWNAŃ KIRCHHOFFA

Wyznaczyć rozptyw prądów metodą równań Kirchhoffa



$I_2 = 2\text{A} \rightarrow$  źródło prądowe

$$\begin{cases} I_1 + 2 - I_3 = 0 \\ 18 - 1 \cdot I_1 - 3 \cdot I_3 = 0 \\ 3 \cdot I_3 + 2 \cdot 2 - U_J = 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} I_3 - I_1 = 2 \\ 3I_3 + I_1 = 18 \end{array} \right\} (+): 4I_3 = 20 \Rightarrow I_3 = \frac{20}{4} = 5\text{A}$$
$$I_1 = I_3 - 2 = 5 - 2 = 3\text{A}$$

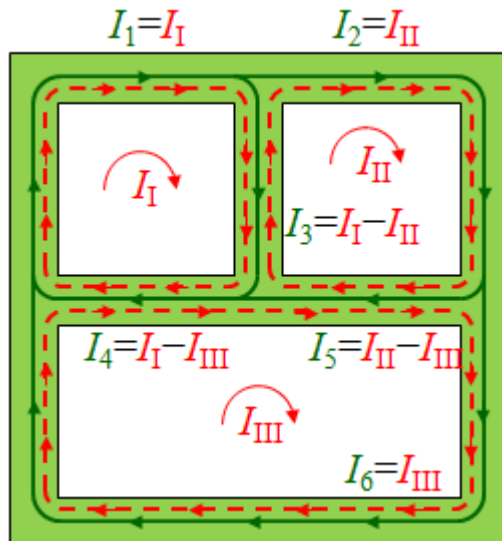
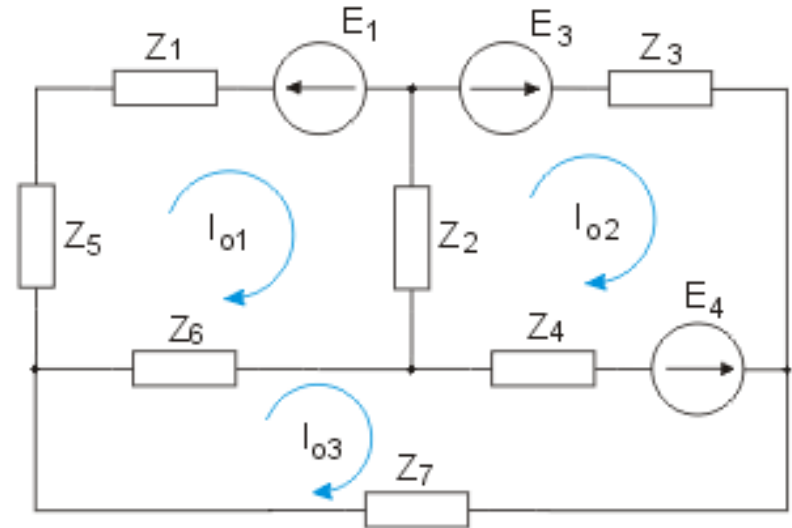
$$U_J = 3 \cdot I_3 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19\text{V}$$

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

W metodzie prądów oczkowych, zwanej również metodą oczkową (prądów cyklicznych), daną sieć przedstawia się za pomocą oczek, które są „jak gdyby” elektrycznie nie powiązаныmi ze sobą obwodami → wprowadza się jako zmienne prądy oczkowe, czyli prądy przypisane niezależnym oczkom występującym w obwodzie.

**Prądem oczkowym** nazywamy „wirtualny” prąd zamykający się w obrębie oczka

**Prąd gałęziowy** jest wypadkową prądów oczkowych płynących w danej gałęzi.



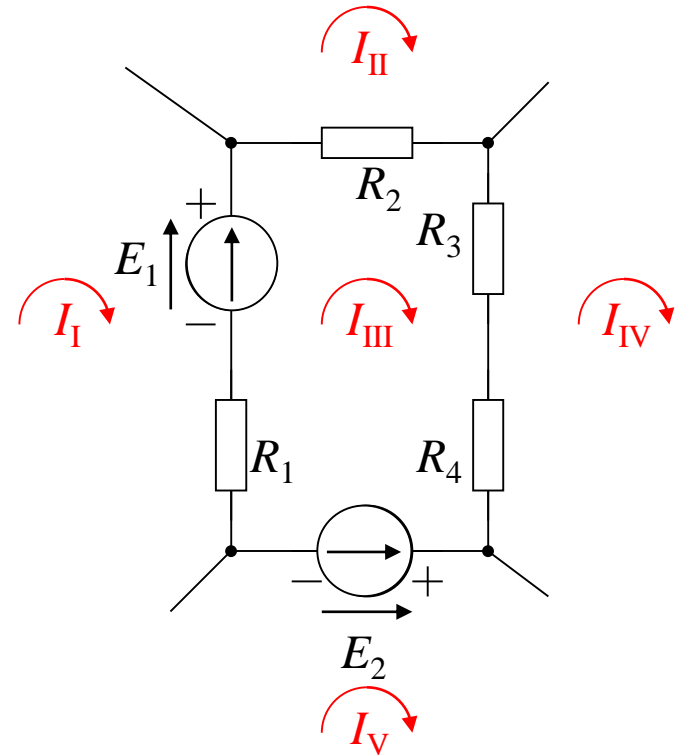
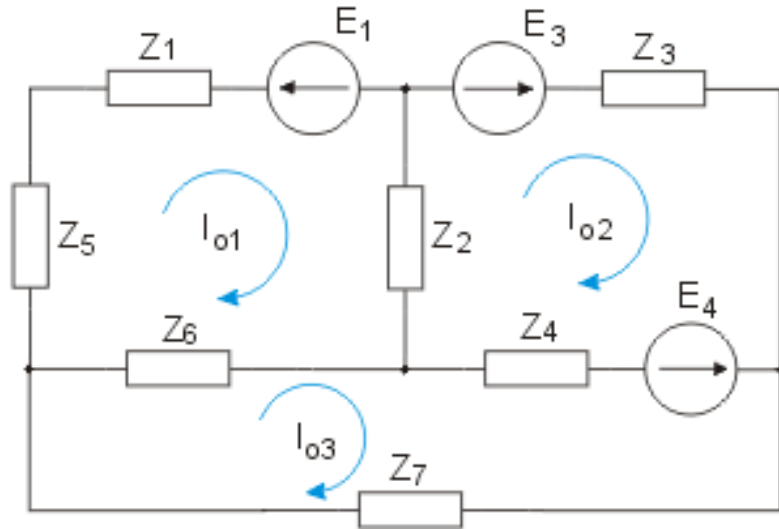
Dla uzyskania opisu oczkowego wykorzystuje się prawo napięciowe Kirchhoffa napisane dla wszystkich oczek niezależnych obwodu – oczko niezależne – oczko w którym bilans napięć nie wynika z bilansu napięć innych oczek (co najmniej jeden element oczka nie był wykorzystywany w bilansie napięć innych oczek).

Następnie wyraża się wszystkie prądy gałęziowe poprzez prądy oczkowe (prąd gałęziowy jest równy sumie lub różnicy prądów oczkowych przeprowadzonych przez daną gałąź) i otrzymuje opis obwodu w postaci układu równań oczkowych.

**W metodzie oczkowej równania układa się tylko dla oczek, a niewiadomymi są prądy oczkowe.**

Prądy oczkowe dla uproszczenia zapisu numerujemy indeksami rzymskimi I, II, III, IV, ..., a prądy gałęziowe – arabskimi 1, 2, 3, ..

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH



Kierunek przepływu prądów oczkowych można strzałkować dla każdego oczka w sposób dowolny, jednakże komplikuje to układanie równań dla oczek.

Prądy oczkowe są wirtualnymi, mającymi jedynie znaczenie pomocnicze

→ najlepiej jest zastrzałkować je jednakowo w całym obwodzie (wszystkie zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)

→ ułatwia to znacznie układanie równań

**DZIĘKI WPROWADZENIU WIRTUALNYCH PRĄDÓW OCZKOWYCH OGRANICZA SIĘ LICZBĘ PRĄDÓW WYSTĘPUJĄCYCH W UKŁADZIE RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH UKŁAD. LICZBA PRĄDÓW OCZKOWYCH JEST RÓWNA LICZBIE OCZEK NIEZALEŻNYCH**

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

**Rezystancją własną**  $R_{k,k}$  oczka  $k$  nazywamy sumę rezystancji w oczku, np.

$$R_{\text{III,III}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

**Rezystancją wspólną**  $R_{k,l}$  oczek  $k$  i  $l$  nazywamy sumę rezystancji w gałęzi dzielącej oczka  $k$  i  $l$ , np.

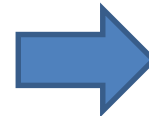
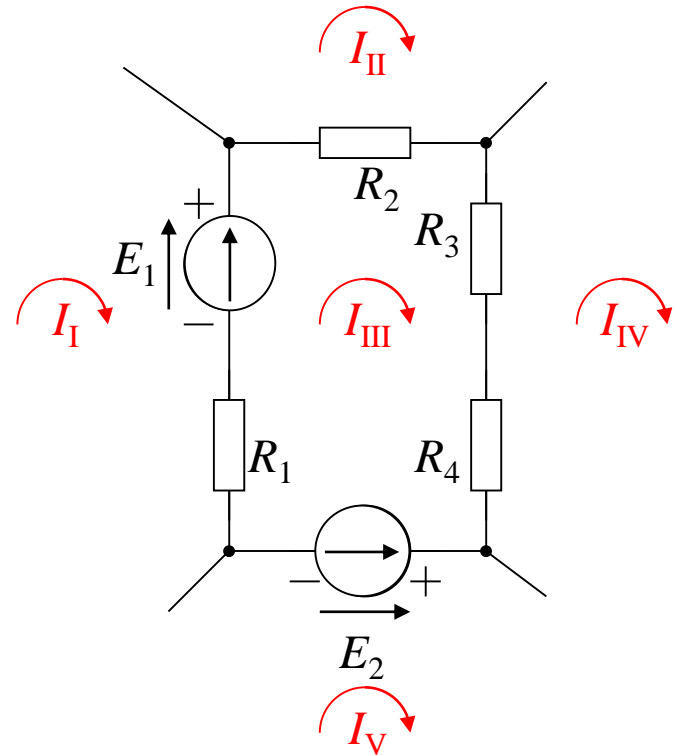
$$R_{\text{III,I}} = R_1 \qquad R_{\text{III,II}} = R_2$$

$$R_{\text{III,IV}} = R_3 + R_4 \qquad R_{\text{III,V}} = 0$$

**Napięcie źródłowe** oczka  $k$  oznaczamy  $E_k$  i nazywamy sumę algebraiczną napięć źródłowych w oczku.

W sumie tej poszczególne napięcia bierzemy ze:

- znakiem dodatnim → strzałkowane zgodnie ze zwrotem prądu oczkowego
- znakiem ujemnym → strzałkowane przeciwnie ze zwrotem prądu oczkowego



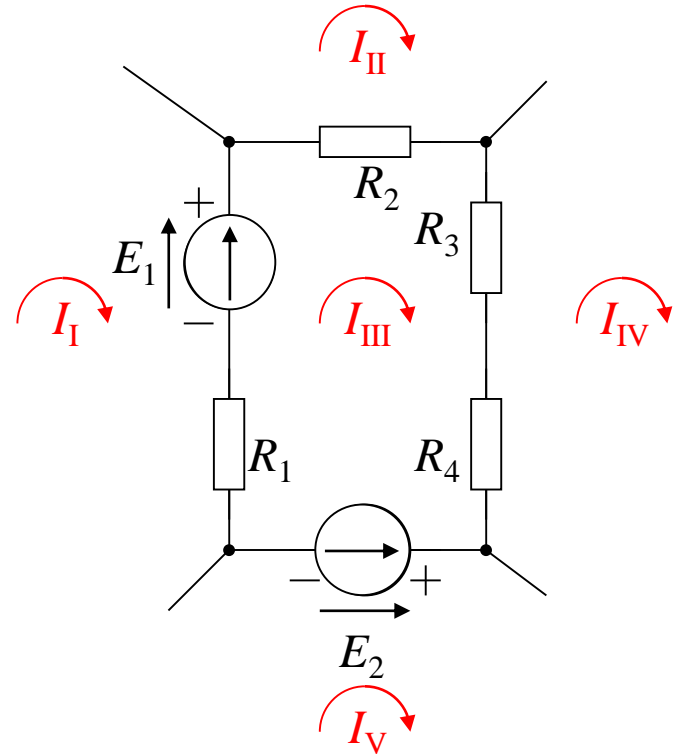
$$E_{\text{III}} = E_1 - E_2$$

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

Przy założeniu, że wszystkie prądy oczkowe strzałkowano w jednym kierunku, równanie dla k-tego oczka ma postać

$$R_{k,k}I_k - \sum_l R_{k,l}I_l = E_k$$

W metodzie oczkowej jedno z oczek określa się oczkiem odniesienia, zaś pozostałe jako oczka robocze



$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I_{\text{III}} - R_1I_{\text{I}} - R_2I_{\text{II}} - (R_2 + R_3)I_{\text{IV}} = E_1 - E_2$$

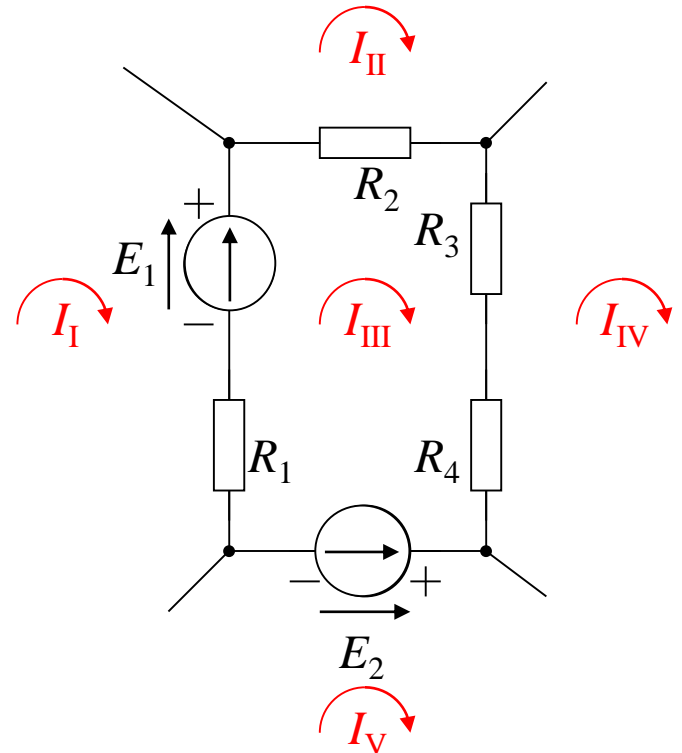
# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

Ustalmy (strzałkujemy) dowolnie kierunki przepływów prądów gałęziowych i ułożmy dla oczka równanie spadków napięć → drugie prawo Kirchhoffa:

$$E_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_3 - E_2 - R_1 I_1 = 0$$

Prądy w poszczególnych gałęziach wyrażamy przez prądy oczkowe:

$$I_1 = I_{III} - I_I \quad I_2 = I_{III} - I_{II} \quad I_3 = I_{IV} - I_{III}$$



$$\underbrace{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}_{R_{III,III}} I_{III} - \underbrace{R_1}_{R_{III,I}} I_I - \underbrace{R_2}_{R_{III,II}} I_{II} - \underbrace{(R_3 + R_4)}_{R_{III,IV}} I_{IV} = \underbrace{E_1 - E_2}_{E_{III}}$$

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

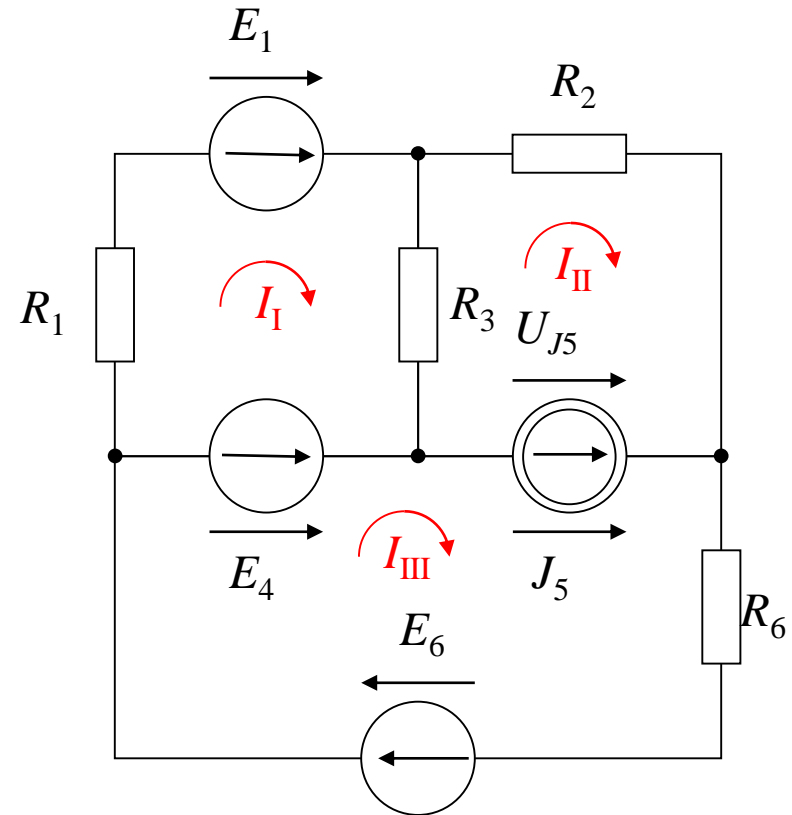
Strzałkujemy jednakowo wszystkie prądy płynące w danym oczku.

Dla każdego oczka układamy równanie spadków napięć → równanie oczkowe.

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_I - R_3I_{II} = E_1 - E_4 \\ (R_2 + R_3)I_{II} - R_3I_I = -U_{J5} \\ R_6I_{III} = E_4 + U_{J5} + E_6 \end{cases}$$

Dla każdego źródła prądowego występującego w obwodzie układamy równanie określające prąd źródłowy jako sumę / różnicę prądów oczkowych.

$$J_5 = I_{III} - I_{II}$$



Dla źródeł prądowych występujących w oczkach sieci, uwzględniamy spadki napięć na tych źródłach – wartości napięć na tych źródłach oznaczamy jako niewiadome.

# METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH

Powstały układ równań rozwiązujemy ze względu na prądy oczkowe i napięcia na źródłach prądowych

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_I - R_3I_{II} = E_1 - E_4 \\ (R_2 + R_3)I_{II} - R_3I_I = -U_{J5} \\ R_6I_{III} = E_4 + U_{J5} + E_6 \\ J_5 = I_{III} - I_{II} \end{cases}$$

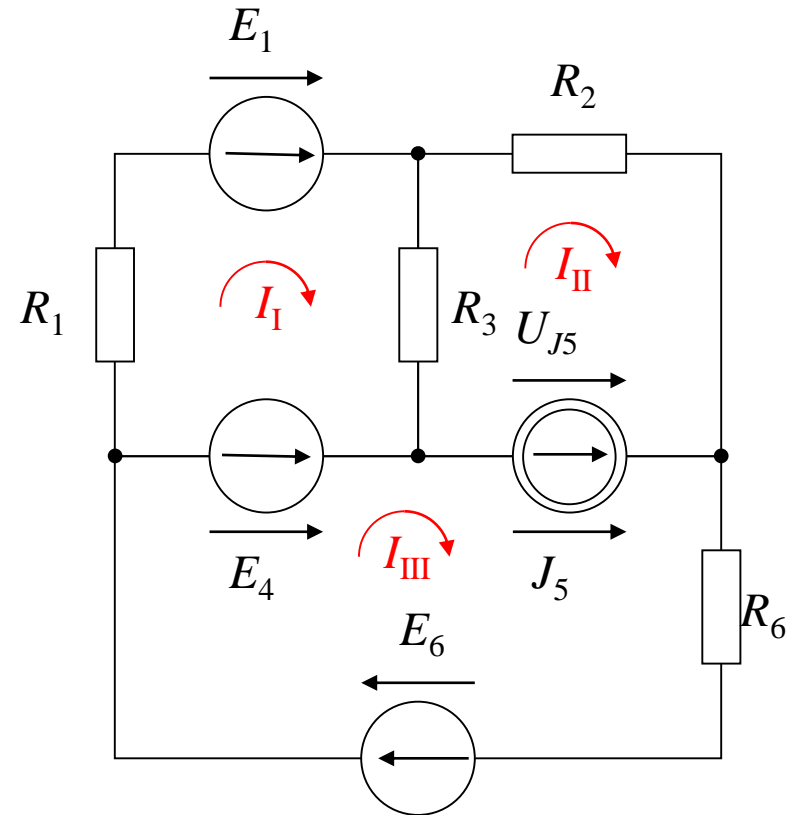
⇓

$$I_I, I_{II}, I_{III}, U_{J5}$$

Wyznaczamy prądy gałęziowe.

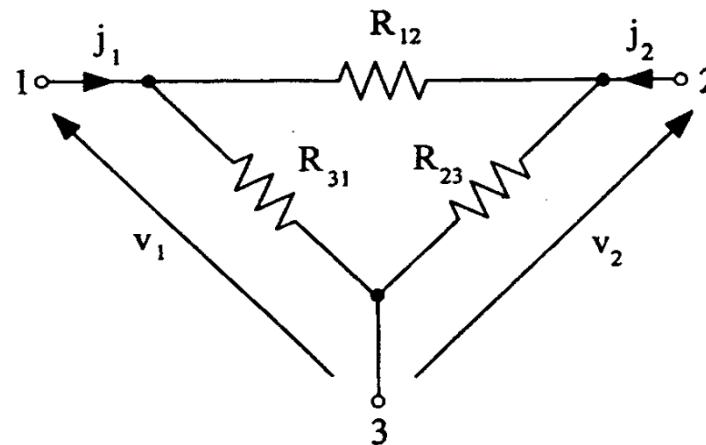
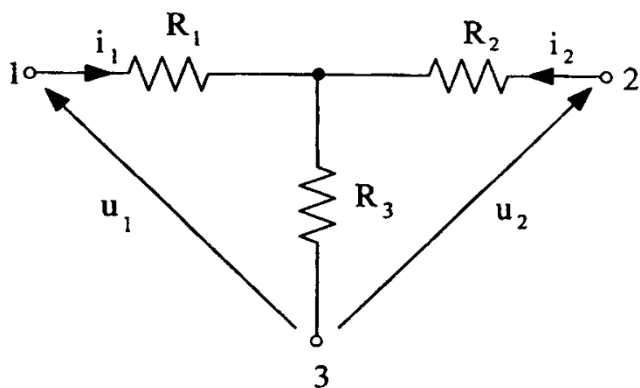
$$I_1 = I_I \quad I_2 = I_{II} \quad I_3 = I_I - I_{II}$$

$$I_4 = I_{III} - I_I \quad I_5 = J_5 \quad I_6 = I_{III}$$



## METODA TRANSFIGURACJI

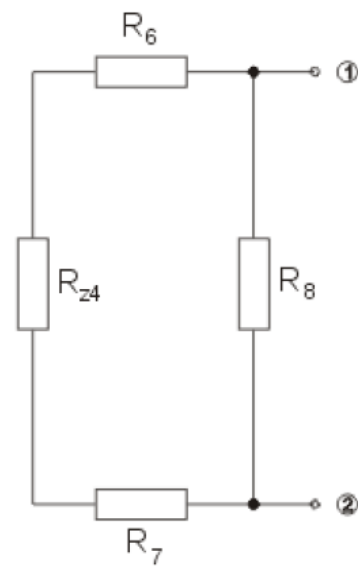
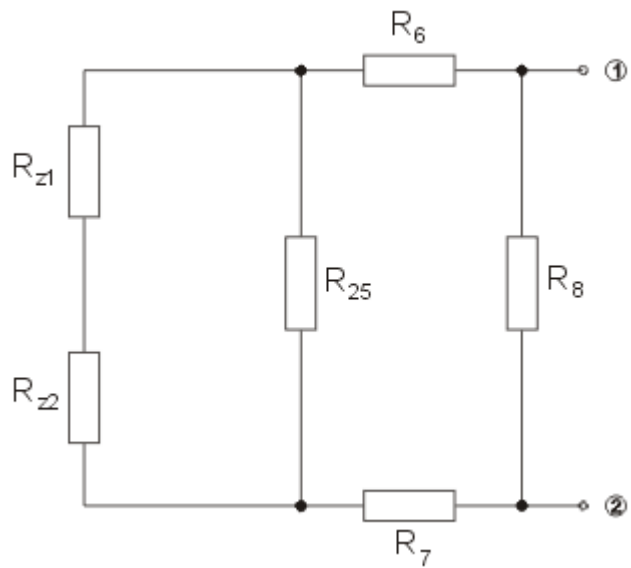
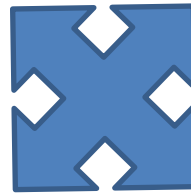
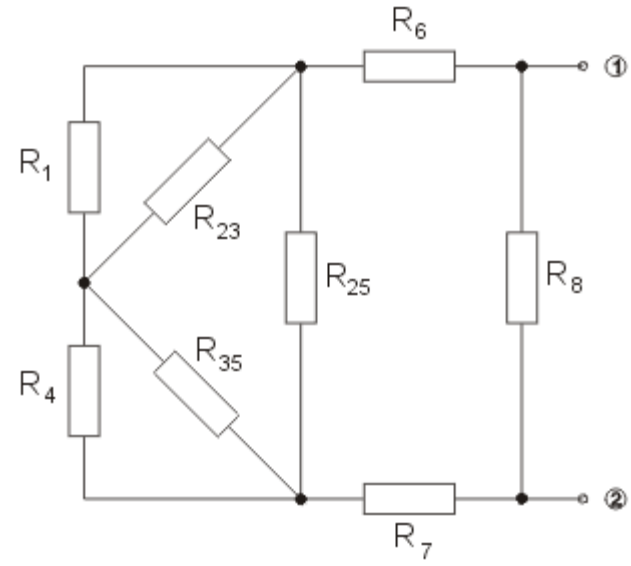
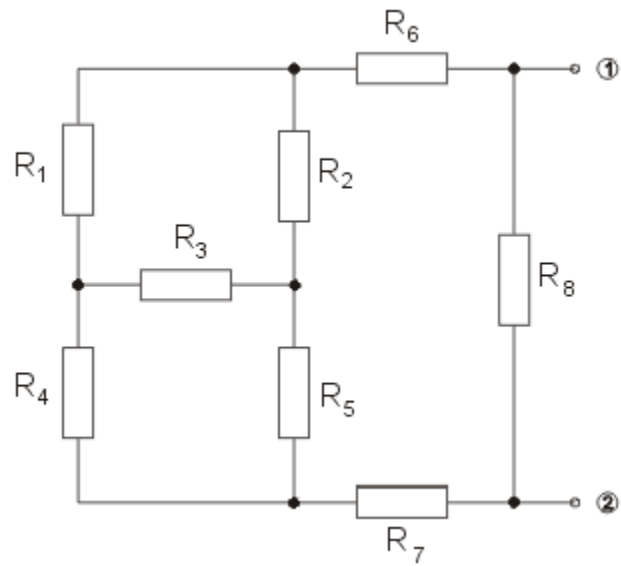
Metoda polega na przekształceniu obwodu elektrycznego, w którym nie można wyróżnić jednoznacznych konfiguracji np. rezystorów (połączenie szeregowe / równoległe) w sposób pozwalający uzyskać prosty obwód, w którym obliczenie rozptywu prądów / napięć nie stwarza poważniejszych problemów.



Równoważność obwodów (transfiguracja np. gwiazda – trójkąt) oznacza warunek niezmienności prądów i napięć w tej części obwodu, która nie podlega przekształceniu transfiguracji.

$$\begin{array}{ll} u_1 = v_1 & i_1 = j_1 \\ u_2 = v_2 & \Leftrightarrow i_2 = j_2 \\ u_3 = v_3 & i_3 = j_3 \end{array}$$

# METODA TRANSFIGURACJI



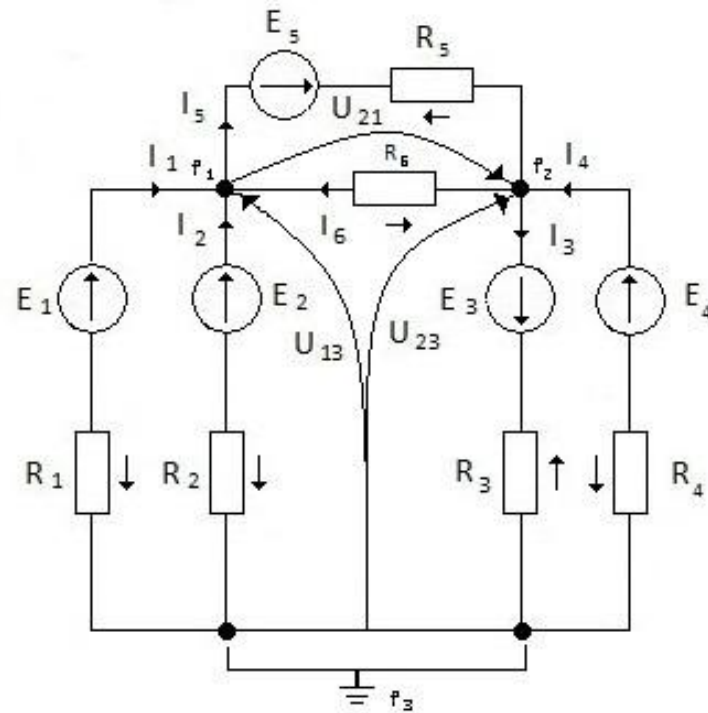
# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Metoda potencjałów węzłowych, zwana również metodą węzłową, jest jedną z najogólniejszych i najczęściej stosowanych metod, pozwalających wyznaczyć prądy wszystkich gałęzi występujących w obwodzie.

Jako zmienne przyjmuje się w niej potencjały poszczególnych węzłów obwodu określane względem jednego arbitralnie wybranego węzła uznanego za węzeł odniesienia ("masy"), którego potencjał przyjmuje się za równy zero.

Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych a więc znacznie mniejsza niż w metodzie wykorzystującej bezpośrednio układ równań otrzymanych w wyniku zastosowania praw Kirchhoffa.

Metoda węzłowa wynika bezpośrednio z równań prądowych Kirchhoffa napisanych dla wszystkich węzłów niezależnych w obwodzie. Prąd każdej gałęzi obwodu jest wyrażany za pośrednictwem potencjałów węzłowych.



# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

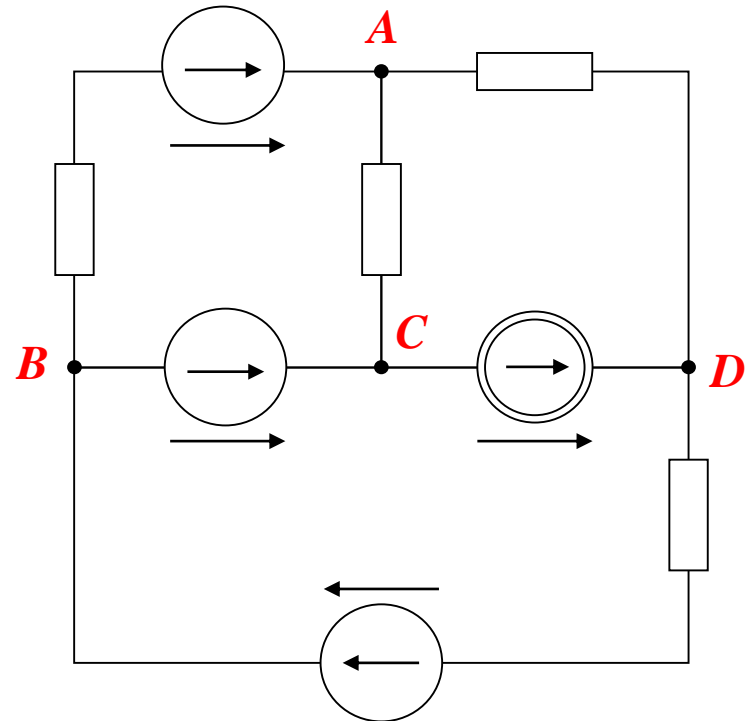
Napięcie  $U_{AB}$  między dwoma punktami  $A$  i  $B$  to różnica ich potencjałów

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

Każdy punkt w obwodzie ma pewien potencjał (napięcie względem punktu odniesienia) → każdy węzeł obwodu ma pewien potencjał.

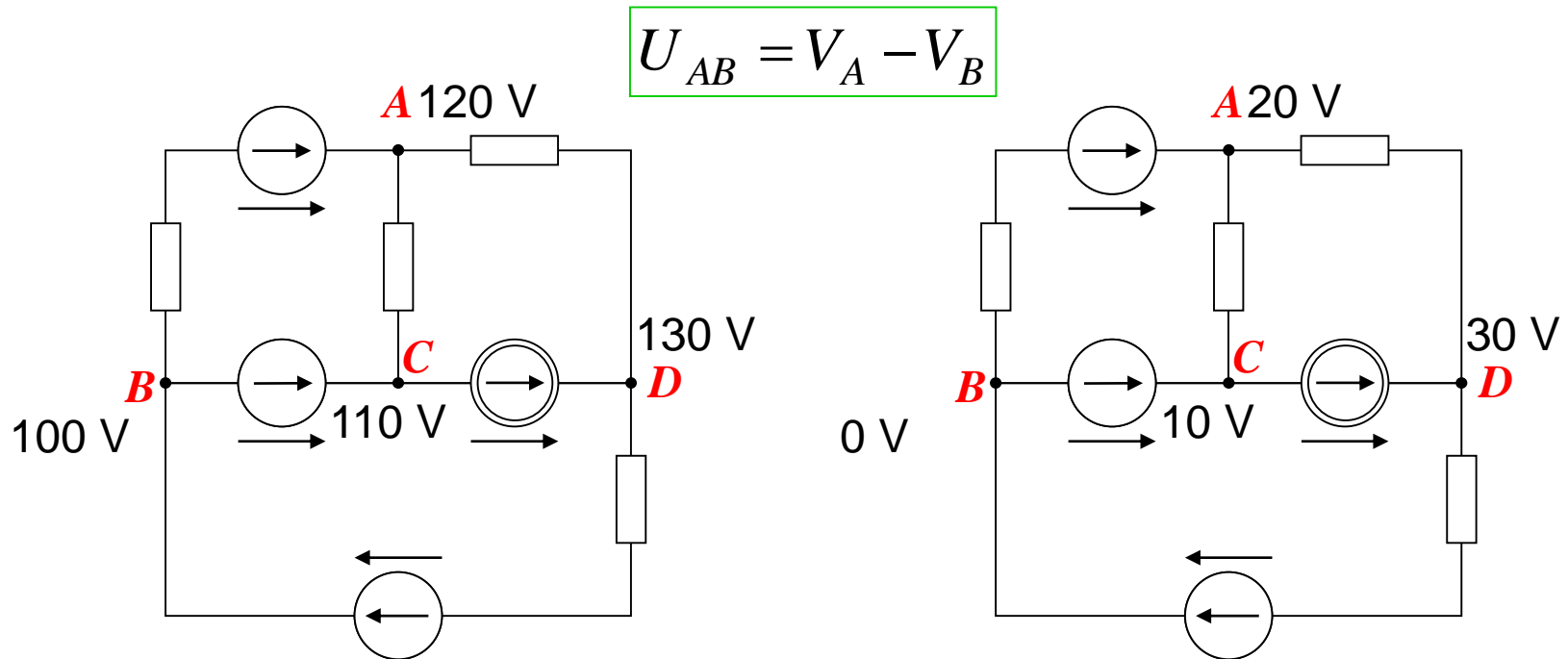
Węzły numerujemy np. wielkimi literami łacińskimi  $A, B, C, \dots$

W metodzie potencjałów węzłowych równania układa się tylko dla węzłów, gdzie niewiadomymi są potencjały węzłowe.



# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Rozpływ prądów i rozkład napięć w obwodzie elektrycznym nie zależy od bezwzględnej wartości potencjałów, lecz jedynie od ich różnic.



Jednemu dowolnie obranemu punktowi obwodu np. B można przypisać zupełnie dowolny potencjał (potencjały pozostałych węzłów i punktów będą określone przez napięcia na elementach).

Węzeł taki nazywamy **węzłem odniesienia**.

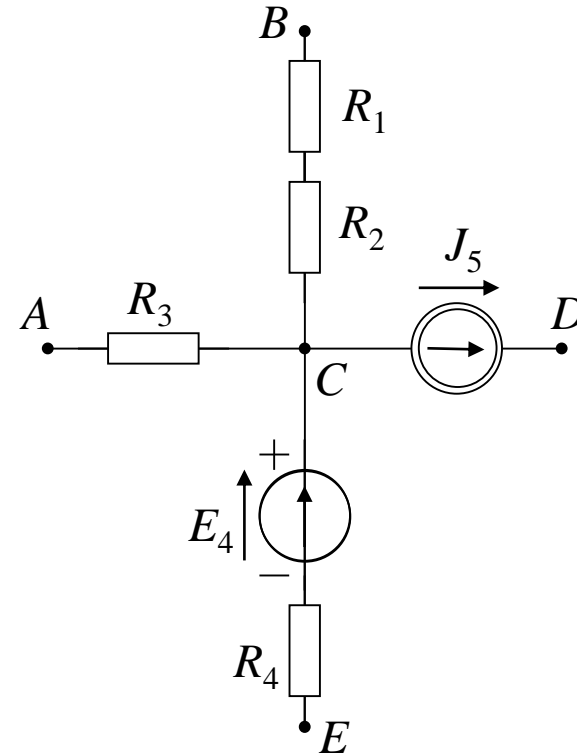
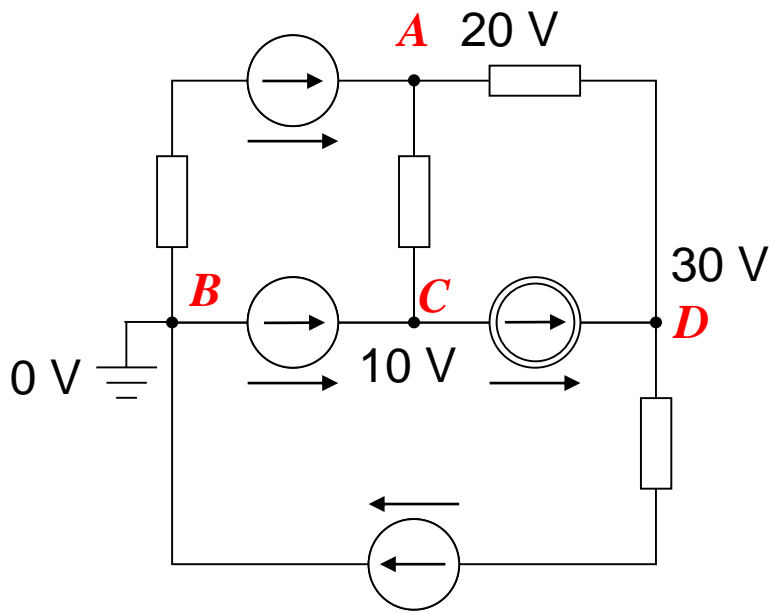
# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Potencjał węzła odniesienia O najwygodniej jest przyjąć równy

$$V_O = 0V \rightarrow V_B = 0V$$

→ upraszcza to układanie równań.

Na schemacie węzeł odniesienia oznacza się symbolem uziemienia.



Rezystancja wewn. idealnego źródła napięciowego = 0, a idealnego źródła prądowego =  $\infty$

Konduktancją  $G_{A,B}$  gałęzi łączącej węzły A i B nazywamy konduktancję tej gałęzi po odłączeniu jej od innych gałęzi oraz po zastąpieniu źródeł idealnych ich rezystancjami wewnętrznymi, np.

$$G_{CA} = \frac{1}{R_3} \quad G_{CB} = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad G_{CD} = 0 \quad G_{CE} = \frac{1}{R_4}$$

# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

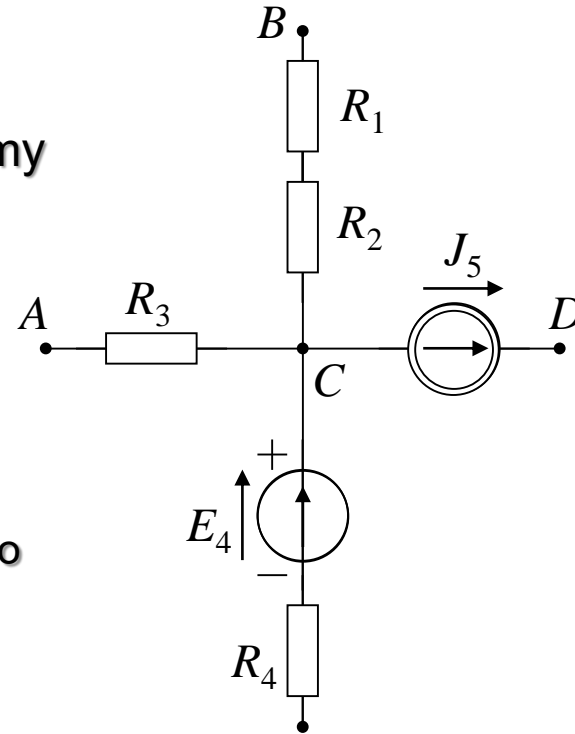
**Prądem źródłowym węzła** nazywać będziemy wyrażenie

$$I_A = \sum_B (E_{A,B} G_{A,B} + J_{A,B})$$

,gdzie:

$E_{A,B}$  – napięcie źródłowe źródła napięciowego w gałęzi A-B

$J_{A,B}$  – prąd źródłowy źródła prądowego w gałęzi A-B.



Wielkości te opisujemy:

ze znakiem plus, gdy strzałka  $E_{A,B}$  lub  $J_{A,B}$  zwrócona jest do węzła

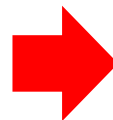
ze znakiem minus, gdy strzałka  $E_{A,B}$  lub  $J_{A,B}$  zwrócona jest od węzła

Prąd w obwodzie wytwarzają tylko źródła



$$I_C = \frac{E_4}{R_4} - J_5$$

Równanie węzłowe dla węzła A



$$V_A \sum_B G_{A,B} - \sum_B G_{A,B} V_B = I_A$$

# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Równanie potencjałów węzłowych

$$V_A \sum_B G_{A,B} - \sum_B G_{A,B} V_B = I_A$$

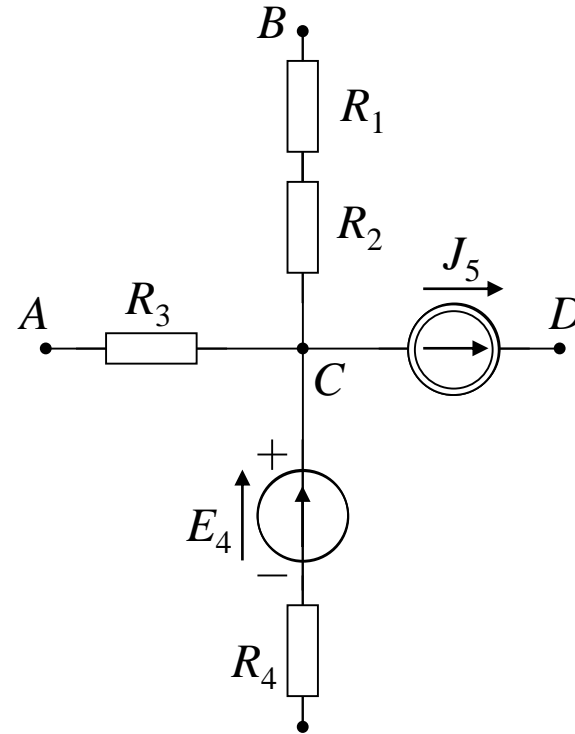
dla węzła A

Konduktancja źródła prądowego  $\rightarrow 0$



$$\left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} + 0 + \frac{1}{R_4} \right) V_C - \frac{1}{R_3} V_A -$$

$$- \frac{1}{R_1 + R_2} V_B - 0 \cdot V_D - \frac{1}{R_4} V_E = E_4 \frac{1}{R_4} - J_5$$



# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Ustalamy kierunki przepływu prądów gałęziowych i układamy dla węzła C równanie wg I prawa Kirchhoffa

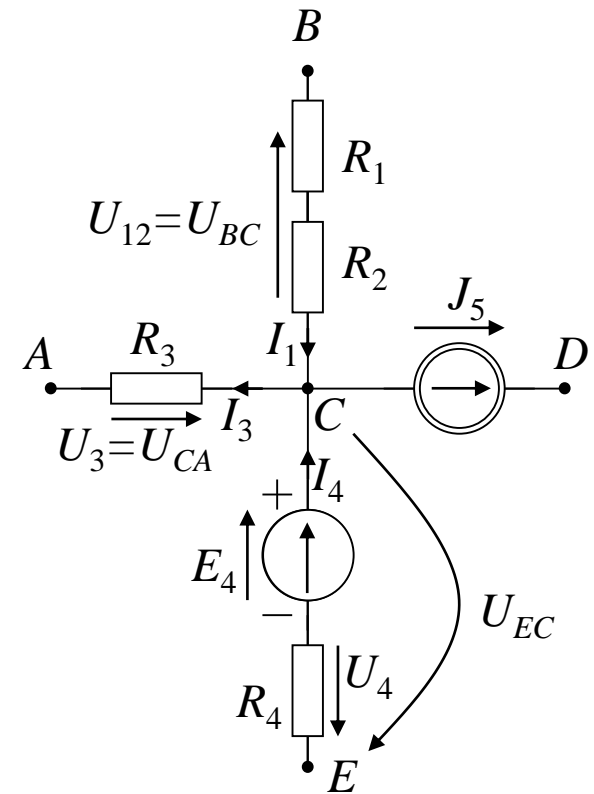
$$-I_1 + I_3 + J_5 - I_4 = 0$$

W oparciu o prawo Ohma, prądy gałęziowe przedstawiamy za pośrednictwem napięć, a te jako różnice potencjałów

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2} (V_B - V_C)$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{1}{R_3} (V_C - V_A)$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{U_{EC} + E_4}{R_4} = \frac{1}{R_4} (V_E - V_C + E_4)$$



Równanie węzłowe

$$\left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} + 0 + \frac{1}{R_4} \right) V_C - \frac{1}{R_3} V_A - \frac{1}{R_1 + R_2} V_B - \frac{1}{R_4} V_E = E_4 \frac{1}{R_4} - J_5$$

# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

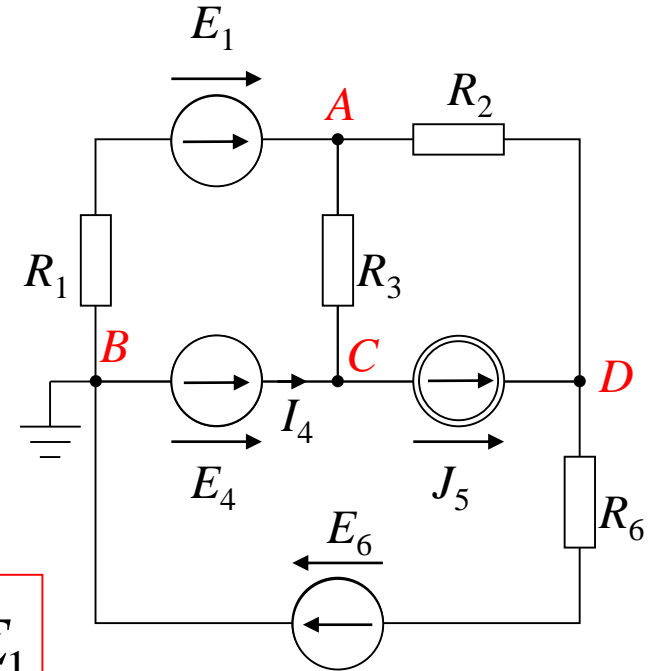
Oznaczamy wszystkie węzły obwodu elektrycznego.

Jeden z węzłów obieramy za węzeł odniesienia i przypisujemy mu potencjał  $0 \text{ V} \rightarrow B$ .

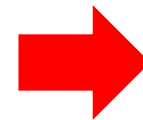
Dla każdego z pozostałych węzłów układamy równanie węzłowe.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \frac{1}{R_3}V_C - \frac{1}{R_2}V_D = \frac{1}{R_1}E_1 \\ \left(\frac{1}{R_3}\right)V_C - \frac{1}{R_3}V_A = I_4 - J_5 \\ \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}\right)V_D - \frac{1}{R_2}V_A = J_5 - \frac{1}{R_6}E_6 \end{cases}$$

Jeżeli istnieją gałęzie o zerowej rezystancji (zawierające tylko idealne źródła napięcia), to układamy dla nich równania wiążące potencjały ich końców.



**Uwaga:** w prądzie źródłowym węzła uwzględniamy również źródła napięcia, przy czym prądy przez nie płynące są na razie niewiadome.



$$V_C = \underbrace{V_B}_{=0} + E_4 = E_4$$

# METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

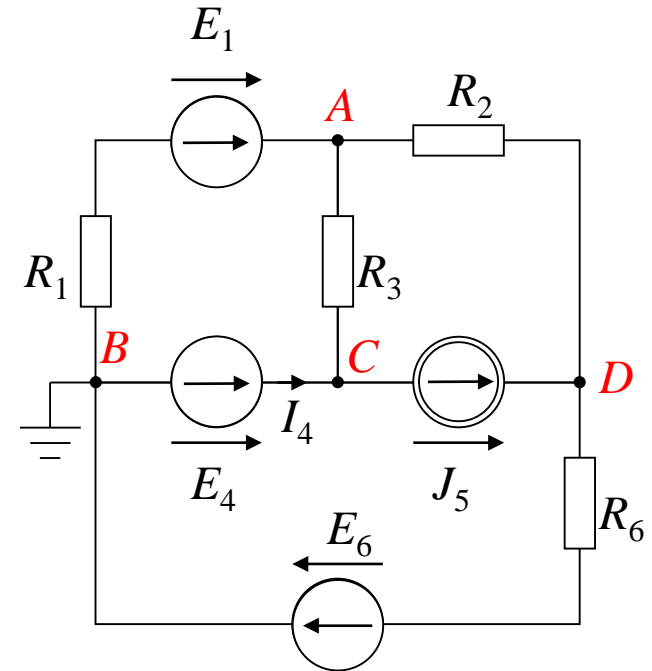
Układ równań rozwiązujemy ze względu na potencjały węzłowe oraz prądy w gałęziach o zerowej konduktancji.

$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2})V_A - \frac{1}{R_3}V_C - \frac{1}{R_2}V_D = \frac{1}{R_1}E_1 \\ (\frac{1}{R_3})V_C - \frac{1}{R_3}V_A = I_{E4} - J_5 \\ (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6})V_D - \frac{1}{R_2}V_A = J_5 - \frac{1}{R_6}E_6 \\ V_C = E_4 \end{cases}$$

⇓

$$V_A, V_C, V_D, I_4 \quad (V_B = 0, V_C = E_4)$$

Określamy kierunki i wyznaczamy prądy gałęziowe



$$-R_1 I_1 + E_1 = V_A \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1}$$

$$R_2 I_2 = V_A - V_D \Rightarrow I_2 = \frac{V_A - V_D}{R_2}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 \quad \left( = \frac{V_A - V_C}{R_3} \right)$$

$$I_5 = J_5$$

$$I_6 = I_2 + I_5 \quad \left( = \frac{E_6 + V_D}{R_6} \right)$$

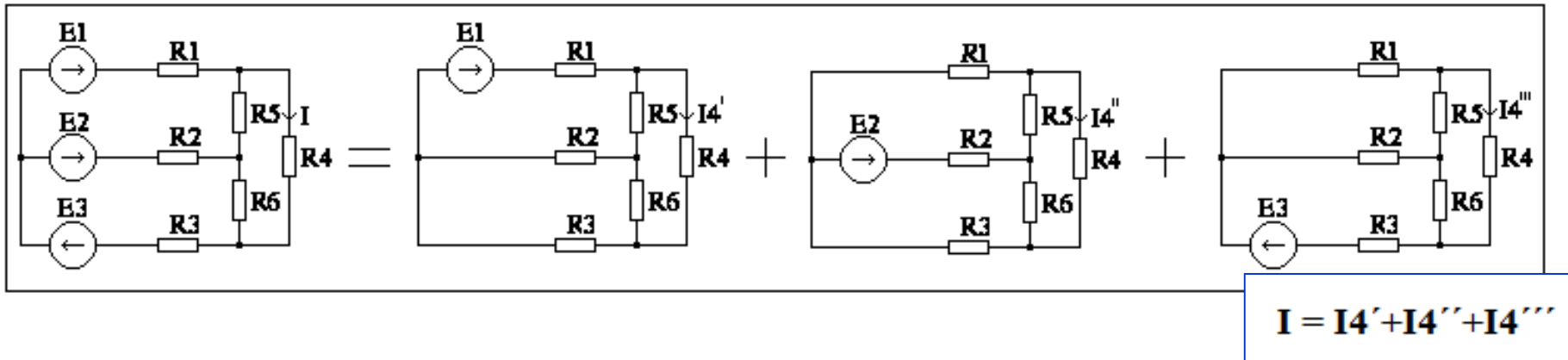
# METODA SUPERPOZYCJI

Zasadę superpozycji, tzn. nakładania się (łac. "superponere = super + ponere = nad + kłaść = nakładać).  
,możemy sformułować jako:

**ODPOWIEŹ OBWODU ELEKTRYCZNEGO LUB JEGO GAŁĘZI NA KILKA WYMUSZEŃ, RÓWNA SIĘ SUMIE ODPOWIEDZI NA KAŻDE WYMUSZENIE Z OSOBNA.**

Prąd w dowolnym elemencie liniowego układu elektrycznego jest równy algebraicznej sumie prądów wywołanych w tym elemencie w wyniku działania każdego napięcia źródłowego niezależnie.

Ponieważ zależności między prądami w elementach, a napięciami w tych elementach są liniowe, więc w podobny sposób można sformułować zasadę superpozycji dla napięć.  
W przypadku obwodu o  $n$  - źródłach (napięcia, prądu), należy  $n$  - krotnie rozwiązać ten sam obwód elektryczny, następnie zsumować otrzymane wyniki



Zasada superpozycji pozwala zastąpić skomplikowane oddziaływanie sumą oddziaływań prostszych (łatwiejszych lub wygodniejszych do analizy).

# METODA SUPERPOZYCJI

Przy pomocy tej zasady oblicza się prądy lub napięcia wywoływane kolejno przez poszczególne źródła napięcia lub prądu. Pozostałe źródła napięcia lub prądu traktuje się jako nie działające (nie mające żadnego wpływu na wartości prądów płynących w obwodzie), pozostawiając w obwodzie impedancje wewnętrzne tych źródeł:

- nie działające (pomijane) idealne źródło napięcia ma rezystancję wewnętrzną równą zero  $\rightarrow R_W = 0 \rightarrow$  wtedy zaciski tego źródła zwieramy
- nie działające (pomijane) rzeczywiste źródło napięcia ma rezystancję wewnętrzną większą od zera  $\rightarrow R_W > 0 \rightarrow$  wtedy pomiędzy zaciskami źródła występuje rezystor o rezystancji równej rezystancji wewnętrznej źródła napięciowego  $R = R_W$
- nie działające (pomijane) idealne źródło prądu ma rezystancję wewnętrzną równą nieskończoność  $\rightarrow R_W = \infty \rightarrow$  wtedy zaciski tego źródła pozostawiamy rozwarłe
- nie działające (pomijane) rzeczywiste źródło prądu ma rezystancję wewnętrzną równą  $\rightarrow R_W > 0 \rightarrow$  wtedy pomiędzy zaciskami źródła występuje rezystor o konduktancji równej konduktancji wewnętrznej źródła prądowego  $G = G_W$

## Tok postępowania podczas obliczania obwodów metodą superpozycji:

- Rozpatrywany obwód zastępujemy przez  $n$  obwodów takich, że w każdym z nich działa jedno źródło, rezystancje pozostają bez zmian.
- Każdy z otrzymanych obwodów obliczamy niezależnie, stosując prawa Kirchhoffa lub metodę przekształceń.
- Prąd płynący w dowolnej gałęzi obliczamy jako sumę algebraiczną prądów występujących w danej gałęzi w każdym z  $n$  obwodów składowych.

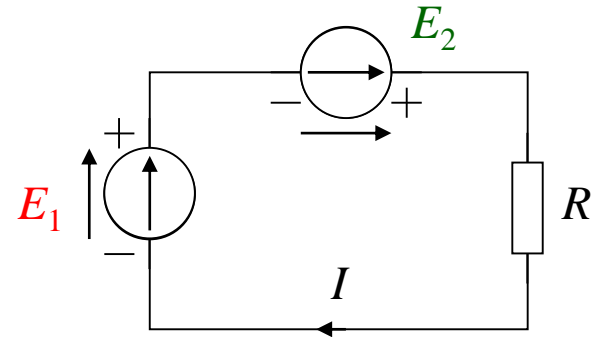
## METODA SUPERPOZYCJI

Obwód elektryczny z dwoma źródłami napięcia  $E_1$  i  $E_2$  (przyczyna przepływu prądu).

Prąd (tj. skutek przepływu prądu)

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R}$$

$$I = \frac{E_1}{R} + \frac{E_2}{R} = I' + I''$$



Prąd  $I$  (skutek) jest więc sumą dwóch prądów  $I'$  i  $I''$  (skutków).  
Pierwszy z nich jest wywołany jedynie przez źródło  $E_1$  (przyczynę pierwszą),  
a drugi – przez źródło  $E_2$  (przyczynę drugą).

Zauważmy, że prąd  $I'$  popłynie w obwodzie zawierającym tylko  $E_1$ , zaś prąd  $I''$  popłynie w obwodzie zawierającym tylko  $E_2$ .

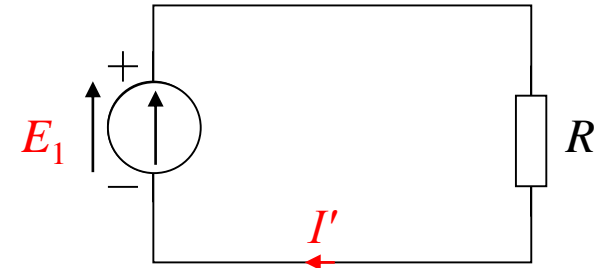
# METODA SUPERPOZYCJI

Zauważmy, że prąd  $I'$  popłynie w obwodzie zawierającym tylko  $E_1$ , zaś prąd  $I''$  popłynie w obwodzie zawierającym tylko  $E_2$ .

Obwód oryginalny powstaje w wyniku nałożenia jeden na drugi obwodów z poszczególnymi źródłami.



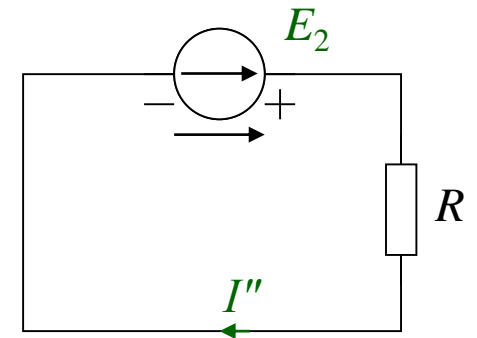
„NAKŁADANIE” CZYLI „SUPERPOZYCJA”



Obwód z wieloma ( $n$ ) źródłami napięcia lub prądu rozkłada się na  $n$  obwodów, z których w każdym znajduje się tylko jedno źródło.

**ZALETY:** obwód z jednym źródłem rozwiązuje się często znacznie szybciej i łatwiej.

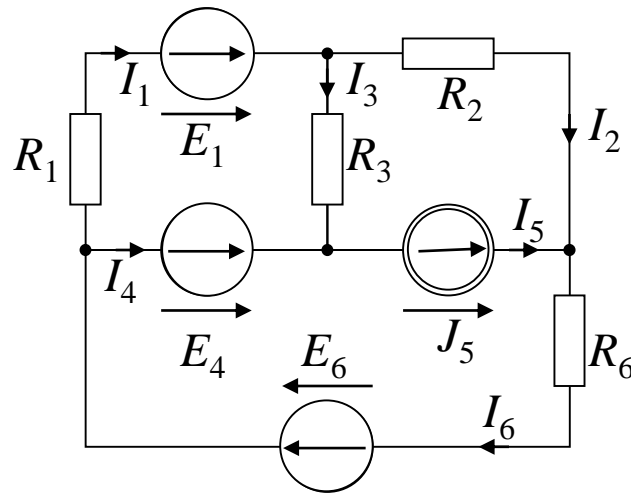
**WADA:** trzeba rozwiązać  $n$  obwodów zamiast jednego.



$$I = I' + I''$$

## METODA SUPERPOZYCJI

- Określamy kierunki przepływu prądów w obwodzie.
- Obwód rozkładamy na tyle obwodów, ile jest źródeł napięcia i prądu, pozostawiając w każdym obwodzie wszystkie rezystancje, ale tylko jedno źródło napięcia lub prądu.



**Uwaga:** przy pomijaniu źródeł:

- idealne źródła napięciowe → zwieramy, gdyż  $R_w = 0$ ,
- idealne źródła prądowe → rozwieramy, gdyż  $R_w = \infty$ .

## METODA SUPERPOZYCJI

- Każdy z obwodów cząstkowych rozwiążemy dowolną metodą.
- Obliczamy wypadkowe prądy gałęziowe jako sumę przyczynków od poszczególnych źródeł:  $I = I' + I'' + I''' + \dots$

### Wskazówki:

Do rozwiązania obwodów cząstkowych warto wykorzystać:

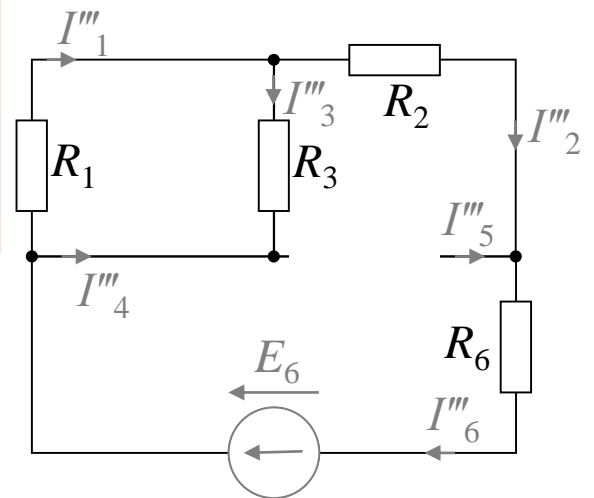
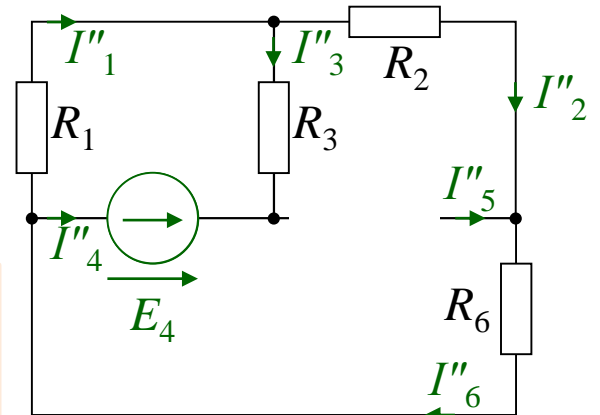
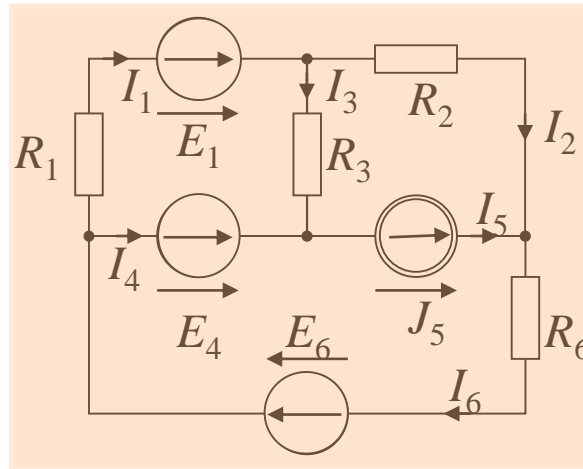
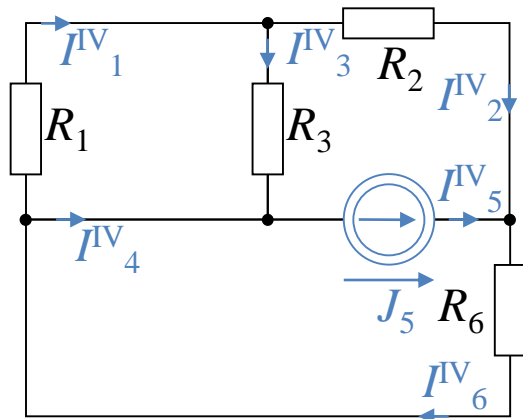
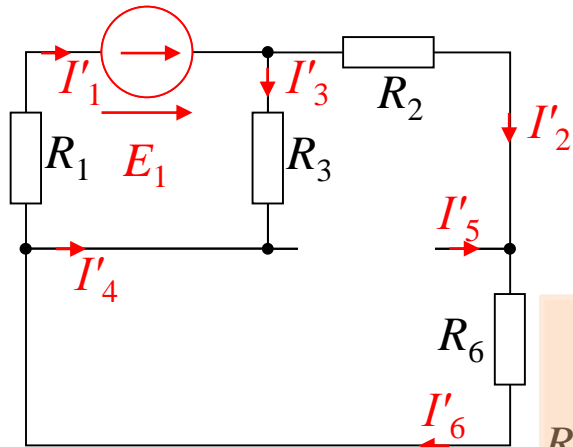
- redukcję połączeń rezystorów,
- dzielnik napięcia i prądu,

zamianę rzeczywistego źródła napięcia w rzeczywiste źródło prądu i odwrotnie,

### Nie opłaca się natomiast stosować:

- metody równań Kirchhoffa,
- metody prądów oczkowych,
- metody potencjałów węzłowych.

# METODA SUPERPOZYCJI



$$I_1 = I'_1 + I''_1 + I'''_1 + I^{IV}_1$$

...

$$I_6 = I'_6 + I''_6 + I'''_6 + I^{IV}_6$$

# METODA THEVENINA



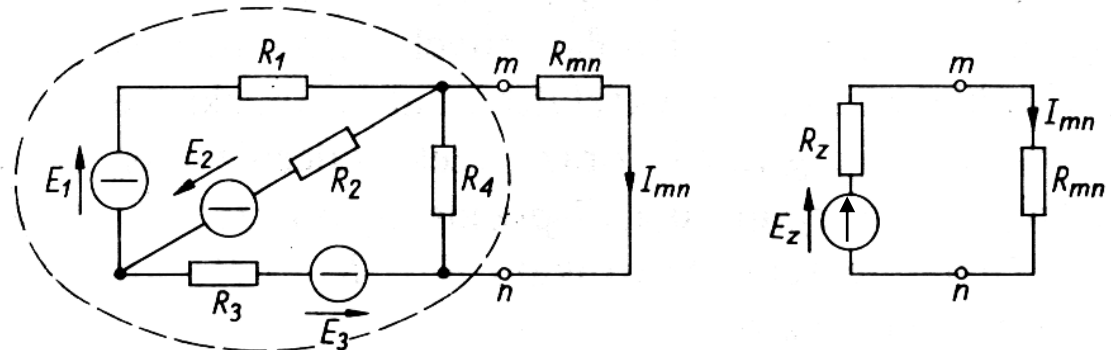
Każdy rozgałęziony obwód elektryczny może być zastąpiony przez rzeczywiste źródło napięciowe. Twierdzenie Thevenina wykorzystujemy, gdy chcemy określić wartość prądu w jednej, wybranej gałęzi

*Prąd płynący przez odbiornik rezystancyjny  $R_{mn}$ , przyłączony do dwóch zacisków  $mn$  dowolnego liniowego układu zasilającego prądu stałego jest równy ilorazowi napięcia  $U_0$  mierzonego na zaciskach  $mn$  w stanie jałowym przez rezystancję  $R$  powiększoną o rezystancję zastępczą  $R_w$  układu zasilającego mierzoną na zaciskach  $mn$*

**Twierdzenie to spotykane jest również pod nazwą twierdzenia o zastępczym źródle napięcia i bywa sformułowane następująco:**

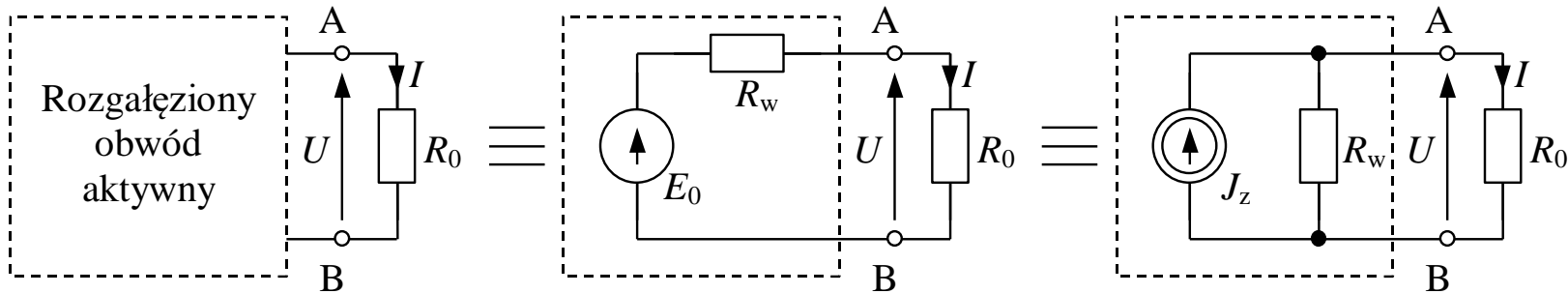
*Obwód elektryczny liniowy o dowolnym ukształtowaniu, traktowany jako złożony dwójnik liniowy aktywny o zaciskach  $mn$ , można zastąpić jednym źródłem o napięciu źródłowym  $E_z$ , równym napięciu stanu jałowego  $U_0$  na zaciskach  $mn$  i o rezystancji wewnętrznej  $R_z$ , równej rezystancji zastępczej mierzonej na zaciskach  $mn$  obwodu.*

**Leon Charles Thevenin** (1857 – 1926), francuski inżynier (telegrafia). W wyniku studiów nad prawami obwodów Kirchhoffa i Ohma rozwinął swoje słynne twierdzenie → twierdzenie Thevenina, co pozwoliło obliczyć prądy w bardziej złożonych obwodach elektrycznych i pozwalając zmniejszyć złożoność obwodów do prostszych układów nazywanych równoważnymi obwodami Thevenina.



# METODA THEVENINA

Działanie aktywnego rozgałęzionego obwodu elektrycznego na jedną gałąź A-B można zastąpić działaniem dwójnika aktywnego, w którym zgodnie z **twierdzeniem Thevenina** występuje jedno idealne źródło napięcia  $E_0$  połączone szeregowo z idealnym rezystorem  $R_w$ , natomiast zgodnie z **twierdzeniem Nortona** - jedno idealne źródło prądu  $J_z$  połączone równoległe z idealnym rezystorem  $R_w$



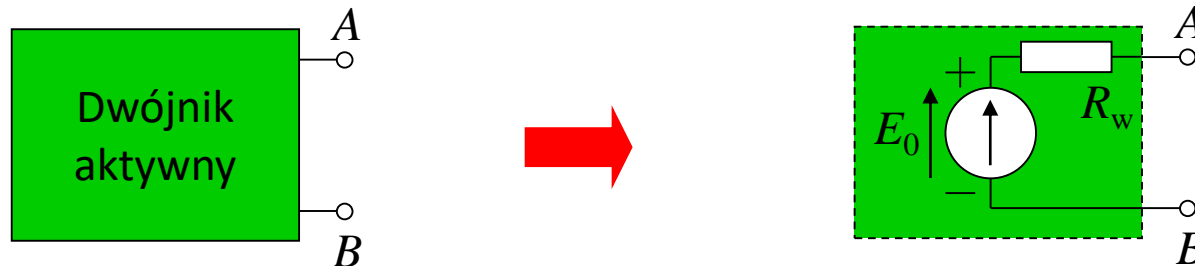
Występujące w tych zastępczych dwójnikach parametry wyznacza się następująco:

- napięcie  $E_0$  jest to napięcie między zaciskami A-B w stanie jałowym,
- prąd  $J_z$  jest to prąd płynący przez gałąź A-B w stanie zwarcia,
- rezystancja  $R_w$  jest rezystancja zastępcza rozgałęzionego obwodu aktywnego widziana
- z zacisków A-B przy zwartych źródłach napięciowych i rozwartych źródłach prądowych.

# METODA THEVENINA

Dwójnik aktywny można zastąpić rzeczywistym źródłem napięcia ( $E_0$ ,  $R_w$ ).

- Napięcie źródłowe  $E_0$  wyznacza się jako równe napięciu na jego zaciskach w stanie jałowym.
- Rezystancję wewnętrzną  $R_w$  wyznacza się jako równą rezystancji zastępczej dwójnika widzianej z jego zacisków po usunięciu z niego wszystkich źródeł (zwarciu źródeł napięciowych i rozwarciu źródeł prądowych).



## Podstawowe zastosowanie:

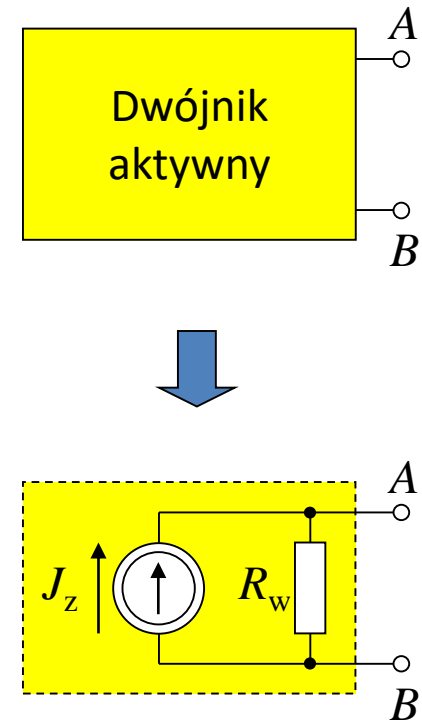
- zastępowanie fragmentu obwodu rzeczywistym źródłem napięcia, wyznaczanie prądu w wybranej gałęzi obwodu bez rozwiązywania całego obwodu.

## Oprócz tego stosuje się je w szeregu różnych zagadnień:

- dobór rezystora ze względu na moc maksymalną, analiza obwodów nieliniowych z jednym elementem nieliniowym.

# METODA NORTONA

- Twierdzenie Thevenina pozwala zastąpić dwójnik aktywny rzeczywistym źródłem napięcia.
- Rzeczywiste źródło napięcia można zamienić na rzeczywiste źródło prądu.
- **Twierdzenie Nortona** → twierdzenie o zastępczym źródle prądu → dwójnik aktywny można zastąpić rzeczywistym źródłem prądu ( $J_z$ ,  $R_w$ ).
- Prąd źródłowy  $J_z$  wyznacza się jako prąd zwarcia dwójnika.
- Rezystancję  $R_w$  wyznacza się tak samo jako w twierdzeniu Thevenina.
- $J_z = E_0/R_w$ .



Edward Lawry Norton

Twierdzenie Nortona było niezależnie uzyskane w 1926 r. przez badacza Hansa Ferdinanda Mayera (1895 – 1980) → Siemens & Halske i inżyniera Edwarda Lawry Nortona (1898 – 1983) → Bell Labs